

Tentamen i Linjär algebra (TATA31/TEN1) 2020–01–16, 14–19.

Inga hjälpmedel, förutom passare, linjal eller gradskiva. OBS! Inga formler eller liknande tryckta på linjal eller gradskiva. Ej räknedosa.

För godkänt räcker 9 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning (≥ 11 p) ht2019 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas) och 16p eller mer ger 4 poäng på uppgift 1. Markera detta genom att skriva "G" respektive "G+1" i rutan för uppgift 1.

Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar läggs ut efter skrivtidens slut på

<http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html>

Resultat meddelas via e-post inom 10 arbetsdagar.

Alla koordinater för vektorer och punkter är, om ej annat anges, givna med avseende på ett positivt orienterat ON-system, \mathbb{R}^n är ett euklidiskt rum med standardskalärprodukten och standardbasen ett positivt orienterat ON-system.

- (3 p) 1. Bestäm de reella talen $a, b \in \mathbb{R}$ så att planen

$$\Pi_1: x + ay + z = b, \quad \Pi_2: 2x + 3y + az = -1, \quad \Pi_3: 3x + 4y + 3z = 2$$

skär varann längs en linje som, om möjligt innehåller punkten $P = (9, -7, 1)$. Ange i så fall linjen på parameterform.

- (3 p) 2. Låt $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$ vara en linjär avbildning med avbildningsmatris

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & -3 \\ 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

i standardbaserna för \mathbb{R}^2 och \mathbb{R}^5 och låt $F^*: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som har A^t som avbildningsmatris i standardbaserna för \mathbb{R}^5 och \mathbb{R}^2 . Visa att $F^* \circ F$ är symmetrisk och bestäm en ON-bas av egenvektorer till $F^* \circ F$. Låt \mathbf{f}_1 och \mathbf{f}_2 vara egenvektorerna du just bestämt. Beräkna $F(\mathbf{f}_1)$ och $F(\mathbf{f}_2)$.

- (3 p) 3. Låt $\mathbf{v} = (1, 2, 3, 2, 1)$ och betrakta underrummet

$$\mathbb{U} = [(1, 0, 1, 0, -2), (1, 0, -3, 0, 2), (0, 1, 0, -1, 0)] \subset \mathbb{R}^5.$$

Beräkna

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{U}} |\mathbf{v} - \mathbf{u}|$$

samt för vilket $\mathbf{u} \in \mathbb{U}$ som detta minsta värde antas.

- (3 p) 4. En lampa placeras i origo och skickar ut ljus i alla riktningar. En triangulär skärm placeras med hörnen i punkterna $(1, 1, 3)$, $(0, -1, 1)$ och $(1, 2, 5)$. Avgör om punkten $P = (60, 30, 270)$ skuggas av skärmen.

- (3 p) 5. Den linjära avbildningen $F: \mathbb{P}_4 \rightarrow \mathbb{P}_2$ har i standardbaserna för \mathbb{P}_4 och \mathbb{P}_2 matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 & 1 & a \\ 2 & 5 & 3 & -1 & b \\ 1 & 4 & 0 & -2 & c \end{pmatrix}$$

där $a, b, c \in \mathbb{R}$. Bestäm a, b, c så att

$$\mathbf{q} = 1 - x + x^2 + x^3 + x^4 \in N(F)$$

och bestäm därefter bas och dimension för noll- respektive värderum.

OBS! Basvektorerna skall i svaret skrivas som polynom!

- (3 p) 6. Avgör vilken sorts yta som definieras av ekvationen

$$9x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 8x_2^2 + 4x_2x_3 + 9x_3^2 = 2.$$

Ange de punkter på ytan som ligger närmast respektive längst ifrån origo (om sådana finnes) samt vilket avstånd dessa har till origo.

- (3 p) 7. Den linjära avbildningen $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definieras av

$$F(x_1, x_2, x_3) = (-x_2 - 2x_3, x_1 - 2x_3, 2x_1 + 2x_2).$$

Bestäm F 's matris i standardbasen och ge en fullständig geometrisk beskrivning av vad F gör med vektorerna i \mathbb{R}^3 .

Lösningförslag till TATA31, Linjär algebra, 2020–01–16

1. Skärningspunkterna mellan planen fås genom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + ay + z = b \\ 2x + 3y + az = -1 \\ 3x + 4y + 3z = 2 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & b \\ 2 & 3 & a & -1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \end{array} \right).$$

Börja med att beräkna nollställena till koefficientmatrisens determinant.

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 3 & a \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{k_1 - k_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ 2-a & 3 & a \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{utv. efter} \\ \text{kol. 1} \end{bmatrix} = \\ &= (2-a)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (a-2)(3a-4) = 0 \iff a = 2, \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Determinantkriteriet (Sats 4.7.2, sid 93) ger då att systemet har entydig lösning, d v s planen skär varann i *en* punkt om $a \neq 2, \frac{4}{3}$ och inte alls eller längs en linje om $a = 2$ eller $a = \frac{4}{3}$. Då vi är ute efter en skärningslinje undersöks fallen $a = 2$ och $a = \frac{4}{3}$ separat.

$$\underline{a = 2}: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & b \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \end{array} \right) \stackrel{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & b \\ 0 & -1 & 0 & -2b-1 \\ 0 & -2 & 0 & -3b+2 \end{array} \right) \stackrel{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & 2b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 4+b \end{array} \right),$$

d v s lösning saknas om $b \neq -4$ och planen skär varann längs en linje om $b = -4$. Om vi löser systemet för $a = 2, b = -4$ fås skärningslinjen

$$L_1: \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -4 - 2y - z = 10 - t \\ -7 \\ t \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vi ser här också att för $t = 1$ fås Ortsvektorn för den givna punkten $P = (9, -7, 1)$.

$$\underline{a = \frac{4}{3}}: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4/3 & 1 & b \\ 2 & 3 & 4/3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 3 & 3b \\ 6 & 9 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \end{array} \right) \stackrel{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 - r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 3 & 3b \\ 0 & 1 & -2 & -6b-3 \\ 0 & 0 & 0 & -3b+2 \end{array} \right),$$

d v s lösning saknas om $b \neq 2/3$. För $a = 4/3, b = 2/3$ skär planen varann längs linjen

$$L_2: \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2/3 - 4y/3 - z = 10 - 11t \\ -7 + 2z = -7 + 6t \\ 3t \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -11 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

För att en punkt på L_2 skall ha z -koordinat 1 måste $t = \frac{1}{3}$ vilket ger en punkt skild från P . Följaktligen, får vi en skärningslinje genom $P = (9, -7, 1)$ om $a = 2, b = -4$.

2. Enligt Sats 7.6.2, sid 186 är $A^t A$ avbildningsmatris till $F^* \circ F$. Eftersom

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & -3 \\ 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -3 \\ -3 & 19 \end{pmatrix}$$

är symmetrisk och avbildningsmatris till $F^* \circ F$ i ON-basen standardbasen så följer det ur Sats 7.7.14, sid 198 att $F^* \circ F$ är symmetrisk.

Beräkna egenvärden och egenvektorer till $A^t A$.

$$\det(A^t A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 19-\lambda & -3 \\ -3 & 19-\lambda \end{pmatrix} = (19-\lambda)^2 - 3^2 = 0 \iff \lambda = 19 \pm 3 = 22, 16,$$

$$\underline{\underline{\lambda = 22}}: \begin{pmatrix} -3 & -3 & | & 0 \\ -3 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \implies X_{22} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 16}}: \begin{pmatrix} 3 & -3 & | & 0 \\ -3 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \implies X_{16} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sätter vi

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

så är $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ en ON-bas i \mathbb{R}^2 av egenvektorer till $F^* \circ F$. Slutligen, låt \mathbf{e}_2 och \mathbf{e}_5 vara standardbaserna i \mathbb{R}^2 respektive \mathbb{R}^5

$$F(\mathbf{f}_1) = F\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_5 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & -3 \\ 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_5 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$F(\mathbf{f}_2) = F\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_5 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & -3 \\ 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{4}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Anmärkning: Notera att $F(\mathbf{f}_1)$ och $F(\mathbf{f}_2)$ kan skrivas

$$F(\mathbf{f}_1) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{11}}{\sqrt{11}} \mathbf{e}_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{22} \frac{1}{\sqrt{11}} \mathbf{e}_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F(\mathbf{f}_2) = \sqrt{16} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dvs ON-basen av egenvektorer till $F^* \circ F$ avbildas av F på en ortogonal mängd där respektive bildvektor fått längden $\sqrt{\text{egenvärdet}}$. Detta är ett exempel på en generell egenskap av enormt stor betydelse i moderna tillämpningar av linjär algebra. Talen $\sqrt{\text{egenvärde}}$ till $A^t A$ kallas A 's *singulärvärden*.

3. Eftersom

Minsta avstånd = ortogonalt avstånd (Sats 6.3.15, sid 150)

följer det att

$$\min_{\mathbf{u} \in U} \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel U}\| = \|\mathbf{v}_{\perp U}\|.$$

Bestäm därför en ON-bas i \mathbb{U} och beräkna $\mathbf{v}_{\parallel\mathbb{U}}$ med hjälp av Sats 6.3.9, sid 146. Sätt

$$\mathbf{u}_1 = (0, 1, 0, -1, 0), \quad \mathbf{u}_2 = (1, 0, 1, 0, -2), \quad \mathbf{u}_3 = (1, 0, -3, 0, 2).$$

Då $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$ väljer vi

$$\mathbf{f}_1 = \hat{\mathbf{u}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \hat{\mathbf{u}}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \mathbf{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

och ortogonaliserar \mathbf{u}_3 .

$$\mathbf{u}_{3\parallel\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2} = (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{f}_1) \mathbf{f}_1 + (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{f}_2) \mathbf{f}_2 = 0 \cdot \mathbf{f}_1 + \frac{1}{6} \left(\mathbf{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \mathbf{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -\mathbf{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_{3\perp\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2} = \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_{3\parallel\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2} = \mathbf{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbf{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \mathbf{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Med $\mathbf{v} = (1, 2, 3, 2, 1)$ fås

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\parallel\mathbb{U}} &= \underset{=0}{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_1)} \mathbf{f}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_2) \mathbf{f}_2 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_3) \mathbf{f}_3 = \\ &= \frac{1}{6} \left(\mathbf{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \mathbf{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left(\mathbf{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \mathbf{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{2}{6} \mathbf{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \mathbf{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \left(\mathbf{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbf{e} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \mathbf{e} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

så att det sökta avståndet blir

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{U}} |\mathbf{v} - \mathbf{u}| &= |\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel\mathbb{U}}| = \left| \frac{1}{3} \left(\mathbf{e} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbf{e} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \right| = \left| \frac{1}{3} \mathbf{e} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 6^2} = \frac{1}{3} \sqrt{75 + 72} = \frac{1}{3} \sqrt{147} = \frac{7}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

4. Inför skärmens hörnpunkters Ortsvektorer som ny bas. I denna bas får skärmens hörn koordinaterna $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ och $(0, 0, 1)$. Skärmen kommer då att hamna i planet med ekvation $y_1 + y_2 + y_3 = 1$ (eftersom alla tre punkterna uppfyller denna ekvation och ett plan är entydigt bestämt av tre punkter som ej ligger längs samma linje). De punkter som då hamnar i skärmens skugga blir därmed de som har positiva koordinater i den nya basen och vars koordinatsumma är större än 1. Vi får bassambandet

$$\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}T = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Beräkna T^{-1} och använd sedan den till att bestämma koordinaterna för P i den nya basen.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\stackrel{r_2-r_1}{\sim} \stackrel{r_3-3r_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) &\stackrel{r_3+r_2}{\sim} \stackrel{-3r_2}{\sim} \stackrel{3r_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 1 & 1 \end{array} \right) &\stackrel{r_2+r_3}{\sim} \stackrel{r_1-r_3}{\sim} \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 7 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 1 & 1 \end{array} \right) \implies T^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \overline{OP} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \\ 270 \end{pmatrix} &= 30 \underline{\mathbf{f}} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = 10 \underline{\mathbf{f}} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Eftersom P 's koordinater i nya basen är > 0 och deras summa större än 1 följer det att P ligger i skärmens skugga.

5. Låt $\underline{\mathbf{x}}_4$ och $\underline{\mathbf{x}}_2$ vara standardbaserna i \mathbb{P}_4 respektive \mathbb{P}_2 . Börja med att bestämma a, b, c så att $\mathbf{q} \in N(F)$.

$$\begin{aligned} F(\mathbf{q}) &= F(1-x+x^2+x^3+x^4) = F \left(\underline{\mathbf{x}}_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \underline{\mathbf{x}}_2 \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 & 1 & a \\ 2 & 5 & 3 & -1 & b \\ 1 & 4 & 0 & -2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \underline{\mathbf{x}}_2 \begin{pmatrix} a+2 \\ b-1 \\ c-5 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{x}}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff a = -2, b = 1, c = 5. \end{aligned}$$

Beräkna sedan en bas i $N(F)$ genom att lösa ekvationen $AX = 0$. Eftersom $V(F)$ är höljet av kolonnvektorerna blir beroendeekvationen för kolonnvektorerna samma ekvation $AX = 0$. För kontrollens skull tar vi även med ekvationen "linjärkombination av kolonnerna = godtycklig vektor". Tar vi allt detta samtidigt fås

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccccc|cc} -1 & -3 & -1 & 1 & -2 & 0 & a_0 \\ 2 & 5 & 3 & -1 & 1 & 0 & a_1 \\ 1 & 4 & 0 & -2 & 5 & 0 & a_2 \end{array} \right) &\stackrel{r_2+2r_1}{\sim} \stackrel{r_3+r_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 3 & 1 & -1 & 2 & 0 & -a_0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -3 & 0 & 2a_0+a_1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 3 & 0 & a_0+a_2 \end{array} \right) &\stackrel{r_3+r_2}{\sim} \\ &\sim \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 3 & 1 & -1 & 2 & 0 & -a_0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -3 & 0 & 2a_0+a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3a_0+a_1+a_2 \end{array} \right) &\stackrel{r_1+3r_2}{\sim} \stackrel{-r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & 4 & 2 & -7 & 0 & 5a_0+3a_1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 3 & 0 & -2a_0-a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3a_0+a_1+a_2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Vi börjar med $N(F)$ och får då

$$X_0 = \begin{pmatrix} -4r - 2s + 7t \\ r + s - 3t \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r, s, t \in \mathbb{R} \implies$$

$$\implies \mathbf{p}_1 = \underline{\mathbf{x}}_4 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -4 + x + x^2, \quad \mathbf{p}_2 = \underline{\mathbf{x}}_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 + x + x^3,$$

$$\mathbf{p}_3 = \underline{\mathbf{x}}_4 \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 7 - 3x + x^4,$$

dvs $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ är en bas i $N(F)$ som därmed har dimension 3.

För värderummets del betraktar vi nu nollrumslösningen som lösning till beroendekvationen för A 's kolonnvektorer. Kallar vi kolonnvektorerna för $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4, \mathbf{q}_5$ så fås

$$\begin{aligned} \underline{\underline{r = 1, s = t = 0}} : \quad & -4\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 = \mathbf{0} \iff \mathbf{q}_3 = 4\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2, \\ \underline{\underline{s = 1, r = t = 0}} : \quad & -2\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_4 = \mathbf{0} \iff \mathbf{q}_4 = 2\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2, \\ \underline{\underline{t = 1, r = s = 0}} : \quad & 7\mathbf{q}_1 - 3\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_5 = \mathbf{0} \iff \mathbf{q}_5 = -7\mathbf{q}_1 + 3\mathbf{q}_2. \end{aligned}$$

Satsen om löjliga element (Sats 5.3.16, sid 111) ger då att

$$V(F) = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4, \mathbf{q}_5] = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2] = \left[\underline{\mathbf{x}}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{x}}_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= [-1 + 2x + x^2, -3 + 5x + 4x^2]$$

så $-1 + 2x + x^2, -3 + 5x + 4x^2$ är en bas i $V(F)$ och därmed $\dim V(F) = 2$.

6. Skriv den kvadratiska formen på matrisform och beräkna dess egenvärden.

$$Q(\mathbf{u}) = Q \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = 9x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 8x_2^2 + 4x_2x_3 + 9x_3^2 =$$

$$= (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = X_{\underline{\mathbf{e}}}^t A_{\underline{\mathbf{e}}} X_{\underline{\mathbf{e}}},$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 8-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 9-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{r_3 \leftarrow r_1}{=} \begin{vmatrix} 9-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 8-\lambda & 2 \\ \lambda-8 & 0 & 8-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{k_1 \leftarrow k_3}{=}$$

$$\begin{aligned}
&= (8 - \lambda) \begin{vmatrix} 10-\lambda & 2 & 1 \\ 4 & 8-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (8 - \lambda) \begin{vmatrix} 10-\lambda & 2 \\ 4 & 8-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (8 - \lambda)((10 - \lambda)(8 - \lambda) - 8) = (8 - \lambda)(\lambda^2 - 18\lambda + 72) = 0 \iff \\
&\iff \lambda = 8, 9 \pm \sqrt{81 - 72} = 9 \pm 3 = 12, 6.
\end{aligned}$$

Då egenvärdena är positiva är ytan en ellipsoid. Sörsta och minsta avstånd ges då av längderna av ellipsoidens stor- och lillaxel. Låt nu $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ vara en ON-bas av egenvektorer där \mathbf{f}_1 är egenvektor till 6, \mathbf{f}_2 till 8 och \mathbf{f}_3 till 12. Då gäller att

$$\begin{aligned}
Q(\mathbf{u}) &= Q\left(\mathbf{f} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = 6y_1^2 + 8y_2^2 + 12y_3^2 = 2 \iff \\
&\iff 3y_1^2 + 4y_2^2 + 6y_3^2 = \left(\frac{y_1}{1/\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{1/\sqrt{4}}\right)^2 + \left(\frac{y_3}{1/\sqrt{6}}\right)^2 = 1.
\end{aligned}$$

Detta innebär att minsta respektive största avstånd från origo har vi i punkterna vars Ortsvektorer i nya basen är

$$\begin{aligned}
\underline{\text{Minsta avstånd}} : \quad \overline{OP}_{min} &= \pm \mathbf{f} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \mathbf{f}_3, \quad |\overline{OP}_{min}| = \frac{1}{\sqrt{6}} \\
\underline{\text{Största avstånd}} : \quad \overline{OP}_{max} &= \pm \mathbf{f} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{f}_1, \quad |\overline{OP}_{max}| = \frac{1}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Det som återstår är därmed att beräkna egenvektorerna till 6 (som ger max) och 12 (som ger min).

$$\begin{aligned}
\underline{\lambda = 6} : \quad &\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & | & 0 \\ 2 & 2 & 2 & | & 0 \\ 1 & 2 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_1]{\substack{r_1 - 3r_3 \\ r_2 - 2r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & -2 & -4 & | & 0 \\ 0 & -4 & -8 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2/2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \implies \\
&\implies X_6 = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \mathbf{e} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \implies P_{max} = \frac{\pm 1}{3\sqrt{2}}(1, -2, 1), \\
\underline{\lambda = 12} : \quad &\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & | & 0 \\ 2 & -4 & 2 & | & 0 \\ 1 & 2 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_1]{\substack{r_1 + 3r_3 \\ r_2 - 2r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & -8 & 8 & | & 0 \\ 0 & 8 & -8 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2/8} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \implies \\
&\implies X_{12} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies P_{min} = \frac{\pm 1}{3\sqrt{2}}(1, 1, 1)
\end{aligned}$$

7. Vi börjar med att skriva uttrycket för avbildningen på matrisform.

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3) &= (-x_2 - 2x_3, x_1 - 2x_3, 2x_1 + 2x_2) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -x_2 - 2x_3 \\ x_1 - 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = \\ &= \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Då matrisen varken är symmetrisk (den är anti-symmetrisk, $A^t = -A$) eller ortogonal är inte F någon av standardavbildningarna. Vi provar och ser vad F har för egenvärden.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -2 \\ 1 & -\lambda & -2 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} \stackrel{k_1 \leftrightarrow k_2}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -2 \\ 1+\lambda & -\lambda & -2 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l} \text{Utv. efter} \\ \text{kolonn 1} \end{array} \right] = \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}(1+\lambda) \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 + 4) - (1+\lambda)(\lambda + 4) = \\ &= (4 - 4\lambda + \lambda^2 - \lambda^3) - (4 + 5\lambda + \lambda^2) = -9\lambda - \lambda^3 \end{aligned}$$

vilket inte ger så mycket mer än att 0 är ett egenvärde. Beräkna istället $N(F)$ och $V(F)$. Tag med ekvationen "linjärkombination = godtycklig vektor" för att få ekvationer för $V(F)$. Vi får

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \right) \stackrel{\substack{r_3 - 2r_2 \\ -r_1 \\ r_1 \leftrightarrow r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{array} \begin{array}{c} y_2 \\ -y_1 \\ -2y_2 + y_3 \end{array} \right) \stackrel{r_3 - 2r_2}{\sim} \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2y_1 - 2y_2 + y_3 \end{array} \begin{array}{c} y_2 \\ -y_1 \\ 2y_1 - 2y_2 + y_3 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Här ser vi att ekvationen $AX = 0$ har lösningen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \implies N(F) = [2, -2, 1]$$

och att ekvationen "linjärkombination = godtycklig vektor" är lösbar om

$$2y_1 - 2y_2 + y_3 = 0, \text{ d v s } V(F) = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : 2y_1 - 2y_2 + y_3 = 0\}.$$

Notera nu att basvektorn för $N(F)$ är normalvektor till planet som är $V(F)$, d v s $N(F) = V(F)^\perp$. Sätt därför $\mathbf{f}_1 = \frac{1}{3}(2, -2, 1)$ och fyll ut till en höger ON-bas med, t ex

$$\mathbf{f}_2 = \frac{1}{3} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2 = \frac{1}{3^2} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3^2} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}T = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = T^t.$$

Byte till denna ger

$$\begin{aligned} A_{\underline{\mathbf{f}}} &= T^{-1}A_{\underline{\mathbf{e}}}T = \frac{1}{3}T^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}T^t \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ur denna matris kan vi nu se F som en sammansättning av tre avbildningar, först en ortogonalprojektion på planet som utgör $V(F)$ sedan en vridning 90° moturs kring \mathbf{f}_1 följt av sträckning en faktor 3. Detta kan motiveras genom att faktorisera matrisen

$$3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

där var och en av matrisfaktorerna ovan är matris för ovannämnda standardavbildningar. Man kan också utifrån detta se att $F(\mathbf{u}) = 3\mathbf{f}_1 \times \mathbf{u}$.