Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ulf Janfalk

Kurskod: TATA31
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA31/TEN1) 2019–04–23, 8–13.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.
För godkänt räcker 9 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ($\geq$ 11p) ht2018 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas) och 16p eller mer ger 4 poäng på uppgift 1. Markera detta genom att skriva ”G” respektive ”G+1” i rutan för uppgift 1.
Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar läggs ut efter skrivtidens slut på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Resultat meddelas via e-post inom 10 arbetsdagar.
Alla koordinater för vektorer och punkter är, om ej annat anges, givna med avseende på ett positivt orienterat ON-system, $\mathbb{R}^n$ är ett euklidiskt rum med standardskalärprodukten och standardbasen ett positivt orienterat ON-system.

(3 p) 1. Betrakta planen

$$\Pi_1\colon 3x + ay - 3z = 0, \quad \Pi_2\colon ax + 2y - z = 1, \quad \Pi_3\colon 3x + 2y - 3z = 11.$$

För vilka värden på $a \in \mathbb{R}$ har planen exakt en skärningspunkt? För ett värde på a är två av planen parallella. För detta värde på a, bestäm avståndet mellan planen.

(2 p) 2. (a) Bestäm den allmänna lösningen till differensekvationen

$$\begin{cases} a_n = 8a_{n-1} - b_{n-1} \\ b_n = -2a_{n-1} + 7b_{n-1} \end{cases}.$$

(1 p) (b) Låt $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ vara lösningen från (a). Verifiera att din lösning är korrekt genom insättning i matrisformen av ekvationen, d v s visa att din lösning satisfierar $AX_{n-1} = X_n$.

(3 p) 3. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ definieras av

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5, x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_5, x_1 - x_2 + x_4 + 3x_5).$$

Bestäm matrisen till F med avseende på standardbaserna i $\mathbb{R}^5$ och $\mathbb{R}^3$. Visa att $(4, 1, 2) \in V(F)$ och ange alla $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^5$ sådana att $F(\mathbf{v}) = (4, 1, 2)$. Ange också $\dim N(F)$.

VÄND!

(2 p) 4. (a) Bestäm minstakvadrat-lösningen till det olösbara ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + y = 2 \\ x + y = -5 \\ -2x + 3y = 2 \end{cases}.$$

(1 p) (b) Låt

$$\mathbb{U} = [(1,3,1,-2),(2,1,1,3)] \subset \mathbb{R}^4, \quad \text{och} \quad \mathbf{v} = (1,2,-5,2) \in \mathbb{R}^4.$$

Använd lösningen från (a) till att bestämma $\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}$.

(3 p) 5. Betrakta den kvadratiska formen

$$Q(\mathbf{u}) = Q\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 4x_1^2 - 24x_1x_2 + 11x_2^2.$$

Vilken sorts kurva definieras av ekvationen $Q(\mathbf{u}) = -20$? Rita kurvan noggrannt (i x_1x_2-systemet). Relevanta punkter, avstånd, huvudaxelriktningar etc skall framgå av din figur. ***Figuren skall redovisas på separat papper!*** Välj skala förnuftigt.

(3 p) 6. Betrakta underummet

$$\mathbb{U} = [-1 + x + x^2,\ 1 + x - x^3,\ -1 + 3x + 2x^2 - x^3,\ 4 + 2x + x^2 - 3x^3] \subset \mathbb{P}_3.$$

Bestäm en bas i $\mathbb{U}$ och fyll ut denna till en bas i $\mathbb{P}_3$. Ange koordinaterna för $\mathbf{q} = 3 + 5x + x^2 - 4x^3$ i den bas du valt.

(3 p) 7. Antag att $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är en *symmetrisk* linjär avbildning för vilken gäller att

$$F(1,1,1) = (6,11,11)$$

och att

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon x + 2y + 2z = 0\} \quad \text{är egenrum till egenvärdet } 1.$$

Bestäm F:s övriga egenvärden med tillhörande egenrum.

Lösningsförslag till TATA31, Linjär algebra, 2019–04–23

1. Skriv ekvationssystemet på matrisform. Exakt en skärningspunkt $\iff$ entydig lösning $\iff$ determinanten av koefficientmatrisen $\neq 0$. Vi får

$$\begin{cases} 3x + ay - 3z = 0 \\ ax + 2y - z = 1 \\ 3x + 2y - 3z = 11 \end{cases} \iff AX = \begin{pmatrix} 3 & a & -3 \\ a & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix},$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & a & -3 \\ a & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_1-3r_2 \\ r_3-3r_2}}{=} \begin{vmatrix} 3-3a & a-6 & 0 \\ a & 2 & -1 \\ 3-3a & -4 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3-3a & a-6 \\ 3-3a & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= (3-3a) \begin{vmatrix} 1 & a-6 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 3(1-a)(-4-a+6) = 3(1-a)(2-a) = 0 \iff$$

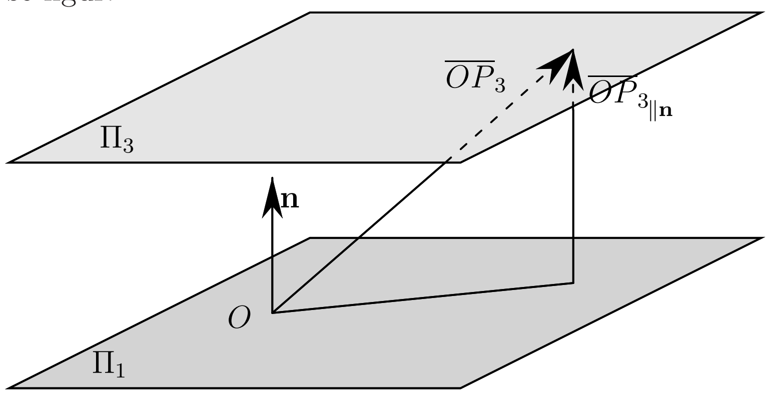
$$\iff a = 1, 2.$$

Följaktligen har vi exakt en skärningspunkt då $a \neq 1$ och $a \neq 2$.
Två plan är parallella om deras normalvektorer är parallella. Om $a = 1$ ser vi att inget av planen är prallellt med något av de andra. För $a = 2$ ser vi att Π_1 och Π_3 är parallella. Tag $P_3 \in \Pi_3$, t ex $P_3 = (3, 1, 0)$. Med $\mathbf{n} = (3, 2, -3)$ fås

$$\text{Avst}(\Pi_1, \Pi_3) = \text{Avst}(\Pi_1, P_3) = \left|\overline{OP}_{3_{\|\mathbf{n}}}\right| = \left|\frac{\overline{OP}_3 \bullet \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{22}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right) \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \frac{11}{22}\sqrt{22} = \frac{1}{2}\sqrt{22},$$

se figur.



2. På matrisform blir ekvationen

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Bestäm egenvärden och egenvektorer till A.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -1 \\ -2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(7-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 15\lambda + 54 = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = \frac{15}{2} \pm \sqrt{\frac{225}{4} - \frac{216}{4}} = \frac{15}{2} \pm \frac{3}{2} = 9, 6.$$

$\underline{\underline{\lambda = 9}}$: $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_9 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$

$\underline{\underline{\lambda = 6}}$: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_6 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$

(a) Enligt härledningen på sid 249 kan den allmänna lösningen skrivas

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = C_9 9^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_6 6^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Med $X_{n-1} = C_9 9^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_6 6^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ fås

$$\begin{aligned} AX_{n-1} &= \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \left(C_9 9^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_6 6^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \\ &= C_9 9^{n-1} \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_6 6^{n-1} \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \\ &= C_9 9^{n-1} \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \end{pmatrix} + C_6 6^{n-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} = C_9 9^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_6 6^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = X_n \end{aligned}$$

3. Låt $\underline{\mathbf{e}}_5$ och $\underline{\mathbf{e}}_3$ vara standardbaserna i $\mathbb{R}^5$ respektive $\mathbb{R}^3$. Skriver vi F enligt de betckningskonventioner som införs i bokens kapitel om linjära avbildningar så fås

$$\begin{aligned} F(\mathbf{v}) &= F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = F\left(\underline{\mathbf{e}}_5 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \right) = F\left(\underline{\mathbf{e}}_5 X\right) = \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5, x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_5, x_1 - x_2 + x_4 + 3x_5) = \\ &= \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_5 \\ x_1 - x_2 + x_4 + 3x_5 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \\ &= \underline{\mathbf{e}}_3 AX \end{aligned}$$

där A är F:s avbildningsmatris i baserna $\underline{\mathbf{e}}_5$ och $\underline{\mathbf{e}}_3$.
Vi visar att $(4, 1, 2) \in V(F)$ genom att lösa

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right) \overset{\substack{-r_2/3 \\ -r_3/2}}{\sim} \\ \sim &\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{r_3 - r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{r_1 - r_2}{\sim} \\ \sim &\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - r - 2s - 2t \\ 1 - r - s + t \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 3\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1\\-1\\1\\0\\0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2\\-1\\0\\1\\0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2\\1\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \quad r,s,t \in \mathbb{R}.$$

Eftersom ekvationssystemet var lösbart gäller $\mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}}_5 X \in V(F)$ och $F(\mathbf{v}) = (4,1,2)$ för alla $r,s,t \in \mathbb{R}$. Ur ovanstående följer också att $\dim N(F) = 3$ eftersom vi fick tre-parametrig lösning. Skulle vi beräknat $N(F)$ på vanligt sätt hade vi gjort exakt samma radoperationer, enda skillnaden hade varit att det stått 0,0,0 istället för 4,1,2 i högerledet.

4. (a) Skriv på matrisform och ta fram normalekvationerna för ekvationssystemet.

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + y = 2 \\ x + y = -5 \\ -2x + 3y = 2 \end{cases} \iff AX = \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 1\\ 1 & 1\\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\\y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\2\\3\\4 \end{pmatrix} = Y,$$

$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2\\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 1\\ 1 & 1\\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0\\ 0 & 15 \end{pmatrix} = 15I,$$

$$A^tY = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2\\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\\2\\-5\\2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\\5 \end{pmatrix},$$

$$A^tAX = 15IX = 15X = A^tY = \begin{pmatrix} -2\\5 \end{pmatrix} \iff X = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -2\\5 \end{pmatrix}.$$

(b) Låt X vara minstakvadrat-lösningen ovan. Enligt sats 6.4.1, sid 162 gäller att $\underline{\mathbf{e}}\,AX =$ ortogonalprojektionen av $\underline{\mathbf{e}}\,Y$ på A:s kolonnrum. Då $\mathbb{U} = A$:s kolonnrum och $\mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}}\,Y$ får vi att

$$\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 1\\ 1 & 1\\ -2 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -2\\5 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 8\\-1\\3\\19 \end{pmatrix}.$$

5. Skriv Q på matrisform och bestäm egenvärden och egenvektorer till Q:s matris. Vi får

$$Q(\mathbf{u}) = Q\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1\\x_2 \end{pmatrix}\right) = 4x_1^2 - 24x_1x_2 + 11x_2^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -12\\ -12 & 11 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1\\x_2 \end{pmatrix},$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -12\\ -12 & 11-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(11-\lambda) - 144 = \lambda^2 - 15\lambda - 100 = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = \frac{15}{2} \pm \sqrt{\frac{225+400}{4}} = \frac{15 \pm 25}{2} = 20, -5,$$

$$\underline{\underline{\lambda = 20}}: \left(\begin{array}{cc|c} -16 & -12 & 0 \\ -12 & -9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{20} = t\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\underline{\underline{\lambda = -5}}: \left(\begin{array}{cc|c} 9 & -12 & 0 \\ -12 & 16 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{-5} = t\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

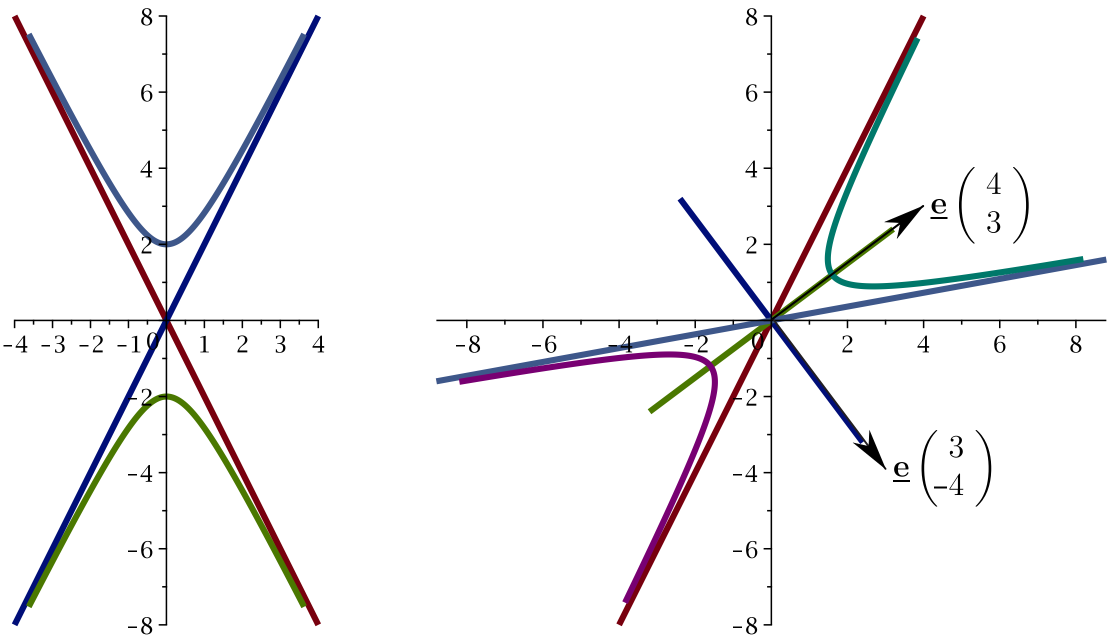
$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{5}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{5}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{f}} = \frac{1}{5}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow Q(\mathbf{u}) = Q\left(\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = 20y_1^2 - 5y_2^2 = -20 \iff -y_1^2 + \left(\frac{y_2}{2}\right)^2 = 1.$$

Ur detta följer att kurvan är en hyperbel och att punkterna närmast origo, på avstånd 2 är $P_\pm = (y_1, y_2) = (0, \pm 2)$. I ursprungliga koordinaterna blir detta

$$\overline{OP}_\pm = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 0 \\ \pm 2 \end{pmatrix} = \pm 2\mathbf{f}_2 = \pm\frac{2}{5}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

d v s i de ursprungliga systemet blir $P_\pm = \dfrac{\pm 2}{5}(4, 3)$.
I nya koordinaterna fås den vänstra kurvan och i ursprungliga fås den högra



I båda figurerna är hyperbelns asymptoter utritade (krävs ej för full poäng men det blir lättare att rita om man vet hur de är).

6. Skriv polynomen på bas·koordinatform och ställ sedan upp beroendeekvationen och "L.K.= godtyckligt polynom". Med $\underline{\mathbf{x}} =$ standardbasen i $\mathbb{P}_3$ fås

$$\mathbf{p}_1 = -1 + x + x^2 = \underline{\mathbf{x}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = 1 + x - x^3 = \underline{\mathbf{x}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{p}_3 = -1+3x+2x^2-x^3 = \underline{\mathbf{x}}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\\-1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_4 = 4+2x+x^2-3x^3 = \underline{\mathbf{x}}\begin{pmatrix}4\\2\\1\\-3\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{q} = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 = \underline{\mathbf{x}}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$$

$$\lambda_1\mathbf{p}_1+\lambda_2\mathbf{p}_2+\lambda_3\mathbf{p}_3+\lambda_4\mathbf{p}_4 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q} \iff$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cc}-1&1&-1&4&0&a_0\\1&1&3&2&0&a_1\\1&0&2&1&0&a_2\\0&-1&-1&-3&0&a_3\end{array}\right) \underset{\substack{r_2+r_1\\r_3+r_1\\-r_4\leftrightarrow r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cc}-1&1&-1&4&0&a_0\\0&1&1&3&0&-a_3\\0&1&1&5&0&a_0+a_2\\0&2&2&6&0&a_0+a_1\end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{-r_1\\r_1+r_2\\r_3-2r_2\\r_4-r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cc}1&0&2&-1&0&-a_0-a_3\\0&1&1&3&0&-a_3\\0&0&0&2&0&a_0+a_2+a_3\\0&0&0&0&0&a_0+a_1+2a_3\end{array}\right).$$

Vi börjar med att lösa beroendeekvationen.

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2s\\s\\-s\\0\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R},$$

$$\underline{\underline{s=1}}:\quad 2\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3 = \mathbf{0} \iff \mathbf{p}_3 = 2\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2.$$

Följaktligen kan vi utse $\mathbf{p}_3$ till löjligt element och enligt sats 5.3.16, sid 111 gäller

$$\begin{aligned}\mathbb{U} &= [-1+x+x^2,\ 1+x-x^3,\ -1+3x+2x^2-x^3,\ 4+2x+x^2-3x^3] =\\ &= [-1+x+x^2,\ 1+x-x^3, 4+2x+x^2-3x^3]\end{aligned}$$

och $-1+x+x^2,\ 1+x-x^3, 4+2x+x^2-3x^3$ är linjärt oberoende. Följaktligen är de en bas i $\mathbb{U}$.
Ekvationen "L.K.= godtyckligt polynom" är lösbar omm $a_0+a_1+2a_3=0$, d v s ett polynom $\mathbf{q} = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ är en linjärkombination av $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$ omm denna ekvationer är uppfylld. Följaktligen har vi att

$$\mathbb{U} = \left\{\mathbf{q} = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 \in \mathbb{P}_3\colon a_0+a_1+2a_3 = 0.\right\}$$

Innan vi väljer utfyllnad kontrollerar vi om $\mathbf{q} = 3+5x+x^2-4x^3$ tillhör $\mathbb{U}$ eller inte. Insättningen i lösningsrumsformen av $\mathbb{U}$ ger

$$3+5+2(-4) = 0 \Longrightarrow \mathbf{q} \in \mathbb{U}.$$

För att välja utfyllnad utnyttjar vi plus-satsen (sats 5.4.21, sid 123). Om vi då bryter mot villkoret och väljer, t ex $\mathbf{q}_5 = 1 \notin [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_4]$ så ger plus-satsen att $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_4, \mathbf{q}_5$ är linjärt oberoende. Satsen om rätt antal element (sats 5.4.19, sid 121) ger då att de är en bas i $\mathbb{P}_3$. Slutligen, för att bestämma koordinaterna för $\mathbf{q} = 3+5x+x^2-4x^3$

observerar vi att eftersom $\mathbf{q} \in \mathbb{U}$ så är $\mathbf{q}$ en linjärkombination av $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ och $\mathbf{p}_4$. Därmed kommer $\mathbf{q}_5$-koordinaten att vara 0.

$$\mu_1\mathbf{p}_1 + \mu_2\mathbf{p}_2 + \mu_4\mathbf{p}_4 = \underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_4 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \iff$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{array}\right) \underset{\sim}{\substack{r_2+r_1 \\ r_3+r_1 \\ -r_4 \leftrightarrow r_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right) \underset{\sim}{\substack{-r_1 \\ r_1+r_2 \\ r_3-2r_2 \\ r_4-r_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{d v s}$$

$$\mathbf{q} = 1\mathbf{p}_1 + 4\mathbf{p}_2 + 0\mathbf{p}_4 + 0\mathbf{q}_5 = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_4 & \mathbf{q}_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Följaktligen har $\mathbf{q}$ koordinaterna $1, 4, 0, 0$ i den aktuella basen.

7. Eftersom F är symmetrisk så är F ortogonalt diagonaliserbar enligt spektralsatsen (sats 8.3.5, sid 8.3.5). Därmed är egenrummen ortogonala (korollarium 8.3.3, sid 214). Då $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ och egenrummet till $\lambda = 1$ har dimension 2 så får det återstående egenrummet dimension 1 och spänns upp av normalen till planet som utgör egenrummet till 1, d v s $(1, 2, 2)$. Återstår att bestämma det saknade egenvärdet. Sätt $\mathbf{n} = (1, 2, 2)$ och dela upp $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ i komponenter, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\|\mathbf{n}} + \mathbf{v}_{\perp\mathbf{n}}$. Då är $\mathbf{v}_{\|\mathbf{n}}$ en egenvektor till det än så länge okända egenvärdet λ och $\mathbf{v}_{\perp\mathbf{n}}$ en egenvektor till egenvärdet 1.

$$\mathbf{v}_{\|\mathbf{n}} = \frac{1}{9}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{5}{9}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}_{\perp\mathbf{n}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\|\mathbf{n}} = \frac{1}{9}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{9}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$F(1,1,1) = F\left(\mathbf{v}_{\|\mathbf{n}}\right) + F\left(\mathbf{v}_{\perp\mathbf{n}}\right) = \lambda\frac{5}{9}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{9}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff 5\lambda\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 9\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} = 50\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 5\lambda = 50 \iff \lambda = 10.$$

Alternativ: Man kan också börja med att bestämma F:s matris och sedan på vanligt sätt bestämma egenvärden och egenvektorer. Tag två vektorer ur egenrummet till 1, t ex $(2,-1,0)$ och $(2,0,-1)$. Då får vi genom att utnyttja att F är linjär

$$\begin{aligned} F(1,1,1) &= F(\mathbf{e}_1)+F(\mathbf{e}_2)+F(\mathbf{e}_3)=(6,11,11),\\ F(2,-1,0) &= 2F(\mathbf{e}_1)-F(\mathbf{e}_2)=(2,-1,0),\\ F(2,0,-1) &= 2F(\mathbf{e}_1)-F(\mathbf{e}_3)=(2,0,-1) \end{aligned}$$

vilket är ett linjärt ekvationssystem med $F(\mathbf{e}_1), F(\mathbf{e}_2), F(\mathbf{e}_3)$ som variabler. Skriver vi detta på matrisform fås

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & (6 & 11 & 11)\\ 2 & -1 & 0 & (2 & -1 & 0)\\ 2 & 0 & -1 & (2 & 0 & -1) \end{array}\right) \underset{\substack{r_2-2r_1\\ r_3-2r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & (6 & 11 & 11)\\ 0 & 3 & 2 & (10 & 23 & 22)\\ 0 & 6 & 9 & (30 & 66 & 69) \end{array}\right) \underset{\substack{r_3-2r_2\\ r_3/5}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & (6 & 11 & 11)\\ 0 & 3 & 2 & (10 & 23 & 22)\\ 0 & 0 & 1 & (2 & 4 & 5) \end{array}\right) \underset{\substack{r_2-2r_3\\ r_1-r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & (4 & 7 & 6)\\ 0 & 1 & 0 & (2 & 5 & 4)\\ 0 & 0 & 1 & (2 & 4 & 5) \end{array}\right) \underset{r_1-r_1}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & (2 & 2 & 2)\\ 0 & 1 & 0 & (2 & 5 & 4)\\ 0 & 0 & 1 & (2 & 4 & 5) \end{array}\right) \Longrightarrow F(\mathbf{e}_1)=(2,2,2)=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix},$$

$$F(\mathbf{e}_2)=(2,5,4)=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\5\\4\end{pmatrix}, F(\mathbf{e}_3)=(2,4,5)=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix} \iff A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 5 & 4\\ 2 & 4 & 5\end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 2\\ 2 & 5-\lambda & 4\\ 2 & 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} \overset{r_3-r_2}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 2\\ 2 & 5-\lambda & 4\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{k_2+k_3}{=}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & 2\\ 2 & 9-\lambda & 4\\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(1-\lambda)((2-\lambda)(9-\lambda)-8)=$$

$$=(1-\lambda)(\lambda^2-11\lambda+10)=-(\lambda-1)^2(\lambda-10)=0 \iff \lambda=1 \text{ (dubbel)},\ 10.$$