LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Ulf Janfalk

Kurskod: TATA31
Provkod: KTR1

Kontrollskrivning i Linjär algebra 2018–10–23, 14–18.

Inga hjälpmedel, förutom linjal, passare eller gradskiva. Ej räknedosa.
På uppgift 1–14 skall ***endast svar*** ges. Varje rätt svar ger 1 poäng, fel svar 0 poäng.
Flera svar får och bör ges på samma blad, helst i nummerordning.
Uppgift 15 och 16 ger tre poäng vardera; ***fullständiga och välmotiverade lösningar krävs.***
Minst 11 poäng tillgodoräknas som tre poäng på uppgift 1 på tentamen.
Minst 16 poäng ger ytterligare en bonuspoäng på tentamen.
Rätten att tillgodoräkna sig bonus består under läsåret 2018-2019.
Resultatet meddelas via e-post. Lösningar läggs ut efter skrivtidens slut på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Om inget annat sägs, är alla koordinater för vektorer i planet och rummet givna relativt en högerorienterad ON-bas.

1. Ange, i parameterform, lösningsmängden (kalla variablerna $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$) till ekvationssystemet som i matrisform har totalmatrisen

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

2. Låt $\mathbf{p}_1 = 2 + 3x$, $\mathbf{p}_2 = -3 + x$ och $\mathbf{q} = 1 + x$. Skriv $\mathbf{q}$ som en linjärkombination av $\mathbf{p}_1$ och $\mathbf{p}_2$.

3. Rita ett vanligt rätvinkligt koordinatsystem (höger ON) och låt **fem rutor** svara mot **en längdenhet**. Låt $\underline{\mathbf{e}}$ vara en ON-bas där $\mathbf{e}_1$ pekar i den horisontella koordinataxelns riktning och $\mathbf{e}_2$ i den lodräta axelns riktning. Rita i detta koordinatsystem in, så exakt som möjligt, vektorerna $\mathbf{u} = 4\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$, $\mathbf{v} = -3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, den ortogonala projektionen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$ och den ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{u}$.

4. Betrakta matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beräkna den/de av uttrycken nedan som är definierade:

$$A^t + B^t, \qquad BA, \qquad AB, \qquad A^tB.$$

5. Skriv vektorn $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ som $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ där $\mathbf{v}_1$ ligger i planet $-x + 2y + z = 0$ och $\mathbf{v}_2$ är vinkelrät mot samma plan.

VÄND!

6. Bestäm skärningslinjen L mellan planen $x + 2y - 3z = 2$ och $3x - y + 2z = -1$.

7. En parallellogram har ett hörn i origo och de två till origo angränsande hörnen i $(1, -2, 3)$ och $(2, 1, 1)$. Bestäm parallellogrammens area.

8. Bestäm $a, b \in \mathbb{R}$ så att $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ blir en lösning till matrisekvationen

$$X \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

9. Beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & e \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & \pi & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & -4 \end{vmatrix}.$$

10. Ange en enhetsvektor som är ortogonal mot vektorerna $(1, 2, 3)$ och $(2, 1, 2)$.

11. Bestäm den normal till L: $2x + 3y = 5$ som går genom punkten $(3, 4)$.

12. Bestäm avståndet mellan punkten $P = (1, 1, 1)$ och linjen

$$L\colon\ \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

13. Lös ut X ur matrisekvationen $\qquad AX = AXA^{-1} + B^t$.

14. Bestäm $a, b \in \mathbb{R}$ så att $B = A^{-1}$ då

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ b & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

(3 p) 15. Betrakta linjen L och planet Π som ges av

$$L\colon\ \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R} \quad \text{respektive} \quad \Pi\colon 3x + y - 2z = 13.$$

Bestäm den ortogonala projektionen L_p av linjen L på planet Π.

(3 p) 16. Betrakta underrummet

$$\mathbb{U} = [(1, 2, 3, 1), (-2, 1, 1, 2), (5, 0, 1, -3), (1, 7, 10, 5)] \subset \mathbb{R}^4.$$

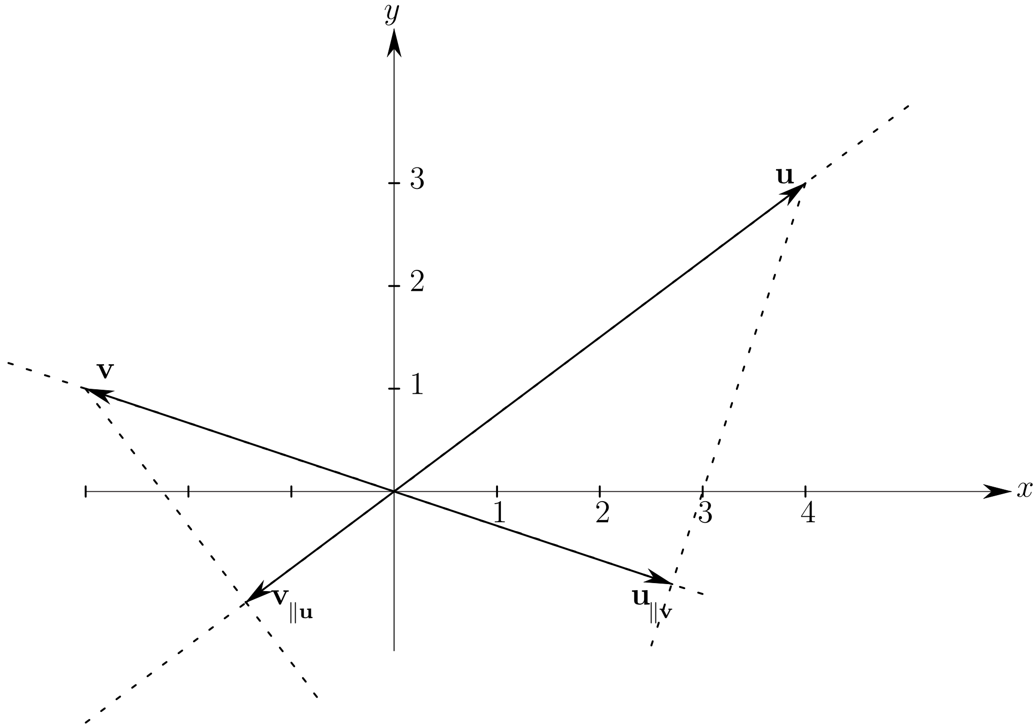
Beskriv $\mathbb{U}$ med så få vektorer som möjligt. Avgör om vektorerna $\mathbf{v}_1 = (3, 1, 2, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, -1, 1, -2)$ och $\mathbf{v}_3 = (5, 0, 1, 1)$ tillhör $\mathbb{U}$ eller inte.

Lösningsförslag till TATA31. Linjär algebra, 2018–10–23

1. $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, -1, -2, 0, 0) + t(11, 0, 0, 5, 4), \quad t \in \mathbb{R}$.

2. $\mathbf{q} = \dfrac{4}{11}\mathbf{p}_1 - \dfrac{1}{11}\mathbf{p}_2$.

3.



4. $A^t + B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ och $A^tB = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. BA, AB är ej definierade.

5. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{\perp\mathbf{n}} = (2, 0, 2)$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{\parallel\mathbf{n}} = (-1, 2, 1)$.

6. L: $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$.

7. Arean$= 5\sqrt{3}$.

8. $a = -13$, $b = 1$.

9. 2.

10. $\dfrac{1}{\sqrt{26}}(1, 4, -3)$.

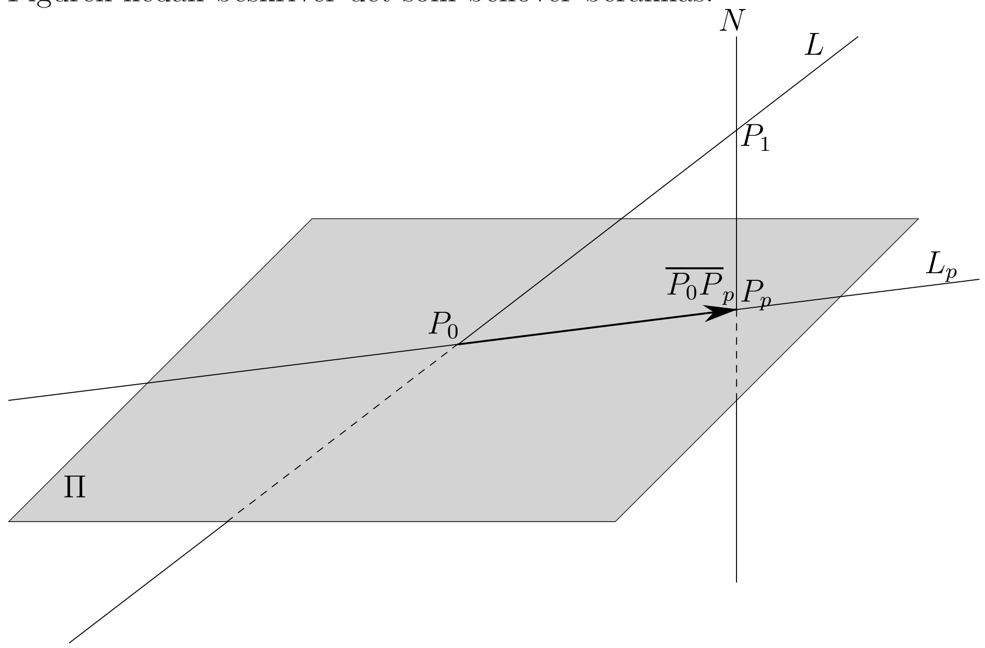
11. $3x - 2y = 1$.

12. $\dfrac{\sqrt{30}}{6} = \sqrt{\dfrac{5}{6}}$.

13. $X = A^{-1}B^t\left(I - A^{-1}\right)^{-1} = A^{-1}B^tA\,(A - I)^{-1} = A^{-1}B^t\,(A - I)^{-1}\,A$. Alla tre ger samma resultat. (Finns fler sätt att skriva X.)

14. $a = 2, b = -1$.

15. Figuren nedan beskriver det som behöver beräknas.



Vi börjar med skärningspunkten P_0 mellan L och Π. Insättning av L:s koordinater i ekvationen för Π ger

$$3(1-2t) + (2+t) - 2(3+t) = -1 - 7t = 13 \iff t = -2 \implies$$
$$\implies \overline{OP_0} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2\,\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Därefter beräknar vi projektionspunkten till $P_1 = (1, 2, 3)$ genom att dra normalen till Π genom P_1 och beräkna dennas skärningspounkt med Π genom insättning p.s.s. ovan.

$$N\colon\ \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$
$$3(1+3t) + (2+t) - 2(3-2t) = -1 + 14t = 13 \iff t = 1 \implies$$
$$\implies \overline{OP_p} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Slutligen beräknar vi riktningsvektorn $\mathbf{v}$ till L_p genom att beräkna vektorn $\overline{P_oP_p}$ som ju är parallell med $\mathbf{v}$.

$$\overline{P_oP_p} = \overline{OP_p} - \overline{OP_o} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Då, t ex P_0 ligger på den sökta linjen följer

$$L_p\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}+t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix},\qquad t\in\mathbb{R}.$$

16. Kalla vektorerna som genererar $\mathbb{U}$ för $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4$ och studera beroendeekvationen samt $L.K.$ =godtycklig vektor, d v s $\lambda_1\mathbf{u}_1+\lambda_2\mathbf{u}_2+\lambda_3\mathbf{u}_3+\lambda_4\mathbf{u}_4=\mathbf{0},\mathbf{x}$. Detta ger systemet

$$\left(\begin{array}{cccc|cc}1&-2&5&1&0&x_1\\2&1&0&7&0&x_2\\3&1&1&10&0&x_3\\1&2&-3&5&0&x_4\end{array}\right)\overset{\substack{r_2-2r_1\\r_3-3r_1\\r_4-r_1}}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|cc}1&-2&5&1&0&x_1\\0&5&-10&5&0&-2x_1+x_2\\0&7&-14&7&0&-3x_1+x_3\\0&4&-8&4&0&-x_1+x_4\end{array}\right)\overset{\substack{5r_3\\5r_4}}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cc}1&-2&5&1&0&x_1\\0&5&-10&5&0&-2x_1+x_2\\0&35&-70&35&0&-15x_1+5x_3\\0&20&-40&20&0&-5x_1+5x_4\end{array}\right)\overset{\substack{r_3-7r_2\\r_4-4r_2}}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|cc}1&-2&5&1&0&x_1\\0&5&-10&5&0&-2x_1+x_2\\0&0&0&0&0&-x_1-7x_2+5x_3\\0&0&0&0&0&3x_1-4x_2+5x_4\end{array}\right).$$

Vi börjar med att lösa beroendeekvationen.

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\lambda_2-5\lambda_3-\lambda_4=-s+3t\\2\lambda_3-\lambda_4=2s+t\\s\\-t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\qquad s,t\in\mathbb{R}.$$

Insättning i beroendeekvationen av lösningarna för $s=1,t=0$ respektive $s=0,t=1$ ger

$$\underline{\underline{s=1,t=0}}\colon\ -\mathbf{u}_1+2\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3=\mathbf{0}\iff\mathbf{u}_3=\mathbf{u}_1-2\mathbf{u}_2$$
$$\underline{\underline{s=0,t=1}}\colon\ 3\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_4=\mathbf{0}\iff\mathbf{u}_4=3\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2,$$

d v s $\mathbf{u}_3$ och $\mathbf{u}_4$ kan utses till löjliga element. Enligt Satsen om löjliga element (Sats 5.3.16, sid 111) gäller då

$$\mathbb{U}=[(1,2,3,1),(-2,1,1,2),(5,0,1,-3),(1,7,10,5)]=[(1,2,3,1),(-2,1,1,2)].$$

Ekvationen "$L.K.$ = godtycklig vektor" ger sedan att en godtycklig vektor är $L.K.$ av $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4$ omm ekvationssystemet är lösbart, d v s omm

$$-x_1-7x_2+5x_3=0\quad\text{och}\quad 3x_1-4x_2+5x_4=0.$$

Detta ger att

$$\mathbb{U}=[(1,2,3,1),(-2,1,1,2)]=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4\colon\ \begin{array}{r}-x_1-7x_2+5x_3=0\\3x_1-4x_2+5x_4=0\end{array}\right\}.$$

För att en vektor skall tillhöra $\mathbb{U}$ måste vektorns koordinater uppfylla ***båda*** ekvationerna. Insättning ger då

	$-x_1 - 7x_2 + 5x_3 =$	$3x_1 - 4x_2 + 5x_4 =$	
$\mathbf{v}_1 = (3, 1, 2, -1)$	0	0	$\in \mathbb{U}$
$\mathbf{v}_2 = (2, -1, 1, -2)$	10	0	$\notin \mathbb{U}$
$\mathbf{v}_3 = (5, 0, 1, 1)$	0	20	$\notin \mathbb{U}$