Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ulf Janfalk

Kurskod: TATA31
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA31/TEN1) 2018–08–30, 8–13.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.
För godkänt räcker 9 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ($\geq$ 11p) ht2017 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas) och 16p eller mer ger 4 poäng på uppgift 1. Markera detta genom att skriva ”G” respektive ”G+1” i rutan för uppgift 1.
Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar läggs ut efter skrivtidens slut på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Resultat meddelas via e-post inom 10 arbetsdagar.
Alla koordinater för vektorer och punkter är, om ej annat anges, givna med avseende på ett positivt orienterat ON-system, $\mathbb{R}^n$ är ett euklidiskt rum med standardskalärprodukten och standardbasen ett positivt orienterat ON-system.

(3 p) 1. Beräkna ortogonalprojektionen av linjen

$$L: \quad \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

på planet Π: $x + 2y - 3z = -7$.

(3 p) 2. Lös nedanstående system av differentialekvationer

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 6x_2 \\ x_2' = 3x_1 - 4x_2 \end{cases}.$$

Bestäm den lösning $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ för vilken gäller att

$$\lim_{t\to\infty} e^t x_1(t) = 2.$$

(3 p) 3. Låt $F, G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara linjära avbildningar där $F(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$:s ortogonala projektion i planet Π: $x + 2y - 2z = 0$ och $G(\mathbf{u}) = 9\mathbf{u}$. Bestäm matriserna i standardbasen till F, G och den linjära avbildningen $G \circ F$.
Verifiera att ditt svar är korrekt genom att med den ovan beräknade matrisen för $G \circ F$ beräkna

$$G \circ F(\text{planets normal}) \quad \text{och} \quad G \circ F(\text{vektor i planet}).$$

(3 p) 4. Betrakta $\mathbb{U} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4] \subset \mathbb{P}_3$ där

$$\mathbf{p}_1 = 1 + x + x^2 - x^3, \qquad \mathbf{p}_2 = 1 - x + 2x^2 + x^3,$$
$$\mathbf{p}_3 = 1 + 3x - 3x^3, \qquad \mathbf{p}_4 = 1 - 3x + 3x^2 + 3x^3.$$

Bestäm en bas i $\mathbb{U}$ samt $\mathbb{U}$:s dimension. Avgör vilka, om någon, av $\mathbf{q}_1 = 1+x+x^2+x^3$, $\mathbf{q}_2 = 3 - x + 5x^2 + x^3$ och $\mathbf{q}_3 = 1 + x^2 - x^3$ som tillhör $\mathbb{U}$.

5. Låt $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ vara en bas i vektorrummet $\mathbb{V}$.

(1 p) (a) För vilka värden på $a \in \mathbb{R}$ blir vektorerna

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1 = a\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + a\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{f}_2 = 2\mathbf{e}_1 - a\mathbf{e}_2 + a\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{f}_3 = a\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + a\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

INTE en bas i $\mathbb{V}$?

(2 p) (b) Bestäm a så att $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ blir en bas där

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 = -13\mathbf{f}_1 + 2\mathbf{f}_2 + 10\mathbf{f}_3$$

och ange koordinatmatrisen $X_{\underline{\mathbf{f}}}$ för $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ i basen $\underline{\mathbf{f}}$.

(3 p) 6. Låt

$$Q(\mathbf{u}) = Q\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 7x_1^2 - 8x_1x_2 + 13x_2^2.$$

Vilken sorts kurva definieras av ekvationen $Q(\mathbf{u}) = 5$? Punkterna P_1 och P_2 är de punkter på kurvan som ligger närmast origo. Linjerna L_1 och L_2 tangerar kurvan i P_1 respektive P_2. Bestäm P_1 och P_2 samt ekvationer för linjerna L_1 och L_2 (parameter-, normal- eller riktningskoefficientform spelar ingen roll, välj själv).

(3 p) 7. Låt $F\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ var en linjär avbildning som är *symmetrisk* och har värderummet

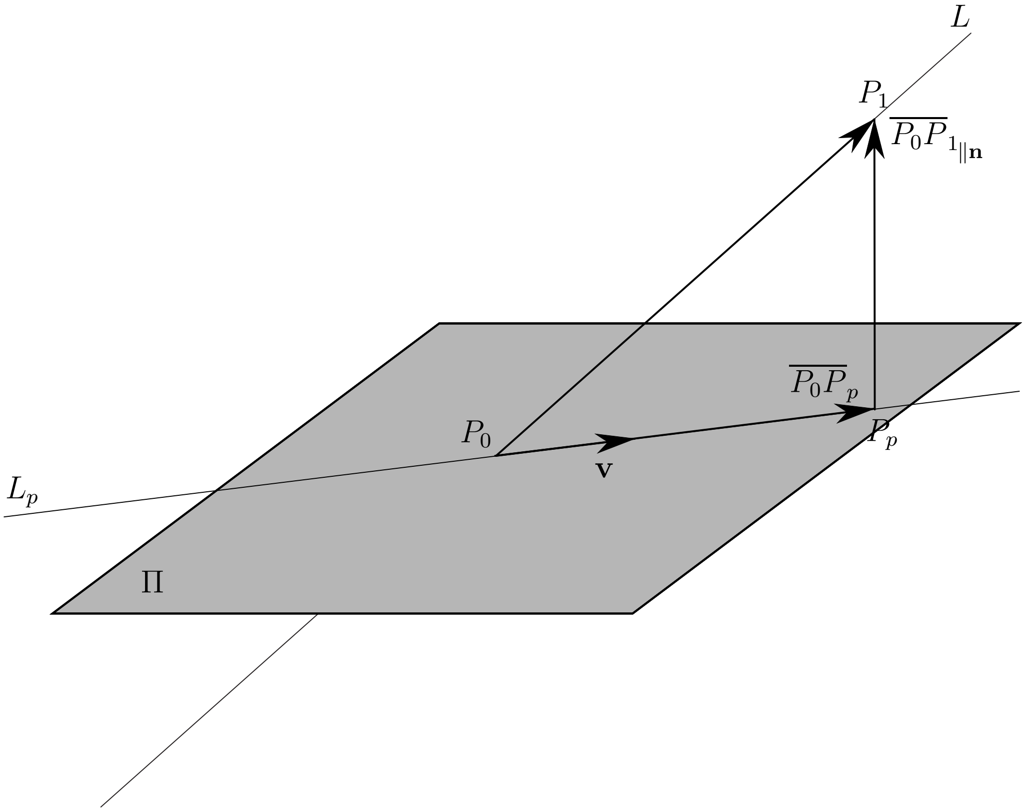
$$V(F) = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \colon \begin{array}{l} x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Bestäm baser i noll- och värderum samt ange deras respektive dimension.
Låt $\mathbf{v} = (1, 2, 3, 4, 5)$ och beräkna

$$\min_{\mathbf{u} \in V(F)} |\mathbf{v} - \mathbf{u}|\,.$$

Lösningsförslag till TATA31, Linjär algebra, 2018–08–30

1. Börja med att rita en figur!



Beräkna skärningspunkten P_0 mellan L och Π genom att sätta in parameterformen för L i Π:s ekvation.Vi får

$$(1+t)+2(8+10t)-3(-6-7t)=35+42t=-7 \iff t=-1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \overline{OP}_0 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\8\\-6\end{pmatrix} + (-1)\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\10\\-7\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

Därefter beräknar vi ortogonalprojektionen av $\overline{P_0P_1}$ på $\mathbf{n}$. Observera att $\overline{P_0P_1} = L$:s riktningsvektor eftersom $t=-1$ i föregående kalkyl.

$$\overline{P_0P_1}_{\|\mathbf{n}} = \frac{\overline{P_0P_1}\bullet\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n} = \frac{1}{14}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\10\\-7\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} = \frac{42}{14}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\6\\-9\end{pmatrix}.$$

Ur figuren ser vi nu att den projicerade linjens riktningsvektor $\mathbf{v}$ är sådan att

$$\mathbf{v} \parallel \overline{P_0P_1} - \overline{P_0P_1}_{\|\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\10\\-7\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\6\\-9\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\4\\2\end{pmatrix} = 2\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$$

så att den sökta linjen blir

$$L_p\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

2. Skriv systemet på matrisform och beräkna egenvärden och egenvektorer till koefficientmatrisen.

$$
\begin{aligned}
X'(t) &= \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 - 6x_2 \\ 3x_1 - 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = AX(t) \\
\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-5)(\lambda+4) + 18 = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \iff \\
&\iff \lambda = -1, 2. \\
\underline{\underline{\lambda = 2}} &: \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -6 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow Y_2 = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \\
\underline{\underline{\lambda = -1}} &: \left(\begin{array}{cc|c} 6 & -6 & 0 \\ 6 & -6 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow Y_{-1} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \Longrightarrow \\
X(t) &= C_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
e^t x_1(t) &= e^t\left(2C_1e^{2t} + C_2e^{-t}\right) = 2C_1e^{3t} + C_2.
\end{aligned}
$$

Eftersom $e^{3t} \to \infty$ då $t \to \infty$ följer det att $C_1 = 0$ för att det efterfrågade gränsvärdet skall kunna existera. Med $C_1 = 0$ fås

$$\lim_{t\to\infty} e^t x_1(t) = \lim_{t\to\infty} C_2 = 2$$

så att den efterfrågade lösningen blir

$$X(t) = 2e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Klart att G:s matris är $A = 9I$ där I =enhetsmatrisen. Enligt Sats 7.3.1, sid 174 står det i avbildningsmatrisens kolonner vad F gör med basvektorerna. Då planets normal $\mathbf{n} = (1, 2, -2)$ fås

$$
\begin{aligned}
&F(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\|\mathbf{n}}, \\
&F(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 - \frac{1}{9}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{9}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \\
&F(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 - \frac{1}{9}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{9}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \\
&F(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_3 - \frac{1}{9}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{9}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

d v s F:s matris blir

$$B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

och därmed, enligt Sats 7.6.2, sid 186, blir

$$AB = 9IB = 9B = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

matris till $G \circ F$.
Tag två oberoende vektorer i Π, t ex $\mathbf{u} = (2, -1, 0)$ och $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$ och beräknar

$$\begin{aligned} G \circ F(\mathbf{u}) &= \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 18 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} = 9\mathbf{u}, \\ G \circ F(\mathbf{v}) &= \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} = 9\mathbf{v}, \\ G \circ F(\mathbf{n}) &= \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

vilket förstås överensstämmer med den geometriska beskrivningen.

4. Börja med att ställa upp och lösa beroendeekvationen och "linjärkombination = godtyckligt polynom" samtidigt. Med $\underline{\mathbf{x}} = (1\ x\ x^2\ x^3)$ fås

$$\lambda_1\mathbf{p}_1 + \lambda_2\mathbf{p}_2 + \lambda_3\mathbf{p}_3 + \lambda_4\mathbf{p}_4 = \lambda_1\,\underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2\,\underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3\,\underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda_4\,\underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \mathbf{0}, \quad a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = \underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

På matrisform blir detta

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & a_0 \\ 1 & -1 & 3 & -3 & 0 & a_1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & a_2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 & 0 & a_3 \end{array}\right) \underset{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1 \\ r_4+r_1 \\ r_2\leftrightarrow r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & a_0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -a_0+a_2 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 0 & -a_0+a_1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 0 & a_0+a_3 \end{array}\right) \underset{\substack{r_3+2r_2 \\ r_4-2r_2}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & a_0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -a_0+a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3a_0+a_1+2a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3a_0-2a_2+a_3 \end{array}\right) \underset{r_1-r_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2a_0-a_2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -a_0+a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3a_0+a_1+2a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3a_0-2a_2+a_3 \end{array}\right).$$

Vi börjar med beroendeekvationen.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda_3+\lambda_4 = -2s+t \\ \lambda_3-2\lambda_4 = s-2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

$$\underline{\underline{s=1,t=0}} \implies -2\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2+\mathbf{p}_3=\mathbf{0} \iff \mathbf{p}_3=2\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2,$$
$$\underline{\underline{s=0,t=1}} \implies \mathbf{p}_1-2\mathbf{p}_2+\mathbf{p}_4=\mathbf{0} \iff \mathbf{p}_4=-\mathbf{p}_1+2\mathbf{p}_2,$$

d v s $\mathbf{p}_3$ och $\mathbf{p}_4$ kan utses till löjliga element. Satsen om löjliga element (Sats 5.3.16, sid 111) ger då att

$$\mathbb{U}=[\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3,\mathbf{p}_4]=[\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2] \quad \text{och} \quad \dim\mathbb{U}=2.$$

"Linjärkombination = godtyckligt polynom" ger att ekvationssytemet är lösbart omm $-3a_0+2a_2+a_1=0$ och $3a_0-2a_2+a_3=0$, d v s

$$\mathbb{U}=\left\{\mathbf{p}\in\mathbb{P}_3\colon \begin{array}{rcrcrcrl} -3a_0 &+& a_1 &+& 2a_2 & & &=0\\ 3a_0 & & &-& 2a_2 &+& a_3 &=0\end{array}\right\}.$$

Insättning av koefficienterna för $\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3$ i $\mathbb{U}$:s ekvationer ger då

$$\underline{\underline{\mathbf{q}_1=1+x+x^2+x^3}}: \quad \begin{array}{rcrcrcrl} -3\cdot1 &+& 1 &+& 2\cdot1 & & &= 0\\ 3\cdot1 & & &-& 2\cdot1 &+& 1 &= 2\neq0\end{array} \implies \mathbf{q}_1\notin\mathbb{U},$$
$$\underline{\underline{\mathbf{q}_2=3-x+5x^2+x^3}}: \quad \begin{array}{rcrcrcrl} -3\cdot3 &-& 1 &+& 2\cdot5 & & &= 0\\ 3\cdot3 & & &-& 2\cdot5 &+& 1 &= 0\end{array} \implies \mathbf{q}_2\in\mathbb{U},$$
$$\underline{\underline{\mathbf{q}_3=1+x^2-x^3}}: \quad \begin{array}{rcrcrcrl} -3\cdot1 &+& 0 &+& 2\cdot1 & & &= -1\neq0\\ 3\cdot1 & & &-& 2\cdot1 &-& 1 &= 0\end{array} \implies \mathbf{q}_3\notin\mathbb{U},$$

d v s endast $\mathbf{q}_2$ tillhör $\mathbb{U}$ eftersom ***båda villkoren*** måste vara uppfyllda.

5. Skriv bassambandet på matrisform, $\underline{\mathbf{f}}=\underline{\mathbf{e}}T$,

$$\mathbf{f}_1=a\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+a\mathbf{e}_3=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}a\\2\\a\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2=2\mathbf{e}_1-a\mathbf{e}_2+a\mathbf{e}_3=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-a\\a\end{pmatrix},$$
$$\mathbf{f}_3=a\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2+a\mathbf{e}_3=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}a\\3\\a\end{pmatrix} \qquad \iff \underline{\mathbf{f}}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}a&2&a\\2&-a&3\\a&a&a\end{pmatrix}.$$

(a) Om $\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3$ är en bas så måste T vara inverterbar vilket enligt sats 4.7.1, sid 92 är ekvivalent med att $\det T\neq0$.

$$\det T=\begin{vmatrix}a&2&a\\2&-a&3\\a&a&a\end{vmatrix} \overset{\substack{k_2-k_1\\k_3-k_1}}{=} a\begin{vmatrix}a&2-a&0\\2&-a-2&1\\1&0&0\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}\text{utveckla}\\\text{efter rad 3}\end{bmatrix}=a\begin{vmatrix}2-a&0\\-a-2&1\end{vmatrix}=$$
$$=a(2-a)=0 \iff a=0,2,$$

d v s $\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3$ är inte en bas om $a=0$ eller 2.

(b) Skriv $\mathbf{u}$ på "bas·koordinatform" i båda baserna.

$$\mathbf{u}=\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=-13\mathbf{f}_1+2\mathbf{f}_2+10\mathbf{f}_3=\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix}-13\\2\\10\end{pmatrix}=\Big[\underline{\mathbf{f}}=\underline{\mathbf{e}}T\Big]=$$

$$= \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} a & 2 & a \\ 2 & -a & 3 \\ a & a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 4-3a \\ 4-2a \\ -a \end{pmatrix} \iff a = 1.$$

Med $a = 1$ är $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ en bas och

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{f}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \left[\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}\, T \right] = \underline{\mathbf{e}}\, T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Återstår alltså bara att lösa ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-5r_3 \\ -r_3 \\ r_3 \leftrightarrow r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow X_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Alternativ: Man kan också utnyttja basbytesformlerna

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left[\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}\, T \iff \underline{\mathbf{e}} = \underline{\mathbf{f}}\, T^{-1} \right] = \underline{\mathbf{f}}\, T^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Beräkna T^{-1} på vanligt sätt,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \ldots \Longrightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Insättning i (1) ger

$$\mathbf{v} = \underline{\mathbf{f}} \begin{pmatrix} -4 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{f}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{dvs} \quad X_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

6. Skriv Q på matrisform och beräkna egenvärden och egenvektorer till Q.

$$Q\left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 7x_1^2 - 8x_1x_2 + 13x_2^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X_{\underline{\mathbf{e}}}{}^t A_{\underline{\mathbf{e}}} X_{\underline{\mathbf{e}}},$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 \\ -4 & 13-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(13-\lambda) - 16 = \lambda^2 - 20\lambda + 75 =$$
$$= (\lambda - 15)(\lambda - 5) = 0 \iff \lambda = 15, 5,$$

$$\underline{\underline{\lambda = 15}}: \left(\begin{array}{cc|c} -8 & -4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{15} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\underline{\underline{\lambda = 5}}: \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_5 = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{f}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom egenvärdena är positiva definierar $Q(\mathbf{u}) = 5$ en ellips. Byte till ON-basen $\underline{\mathbf{f}}$ av egenvektorer ger

$$Q(\mathbf{u}) = Q\left(\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = 15y_1^2 + 5y_2^2 = 5 \iff 3y_1^2 + y_2^2 = \left(\frac{y_1}{1/\sqrt{3}}\right)^2 + y_2^2 = 1.$$

Följaktligen skär ellipsen y_1-axeln i $\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ och y_2-axeln i ± 1. Då koordinataxlarna sammanfaller med symmetriaxlarna eftersom koordinaterna är givna i en ON-bas av egenvektorer är punkterna $P_{1,2} = \left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ de som ligger närmast origo och de eftersökta linjerna $L_{1,2}$ ges av just $y_1 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
För att översätta detta till det ursprungliga koordinatsystemet noterar vi att

$$\overline{OP}_{1,2} = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} \pm 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{f}_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{15}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}(1, -2), \quad P_2 = -\frac{1}{\sqrt{15}}(1, -2).$$

Låt L_1 vara linjen som tangerar ellipsen i P_1. För att få fram linjernas ekvationer kan man , t ex utnyttja koordinatsambandet ($T^{-1} = T^t$ eftersom T är ortonormal)

$$X_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = T^t\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow L_1\colon \frac{1}{\sqrt{3}} = y_1 = \frac{x_1 - 2x_2}{\sqrt{5}} \iff x_1 - 2x_2 = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$\Longrightarrow L_2\colon -\frac{1}{\sqrt{3}} = y_1 = \frac{x_1 - 2x_2}{\sqrt{5}} \iff x_1 - 2x_2 = -\sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Man kan också använda parameterformen. För en punkt P på L_1 gäller att dess ortsvektor har koordinaterna

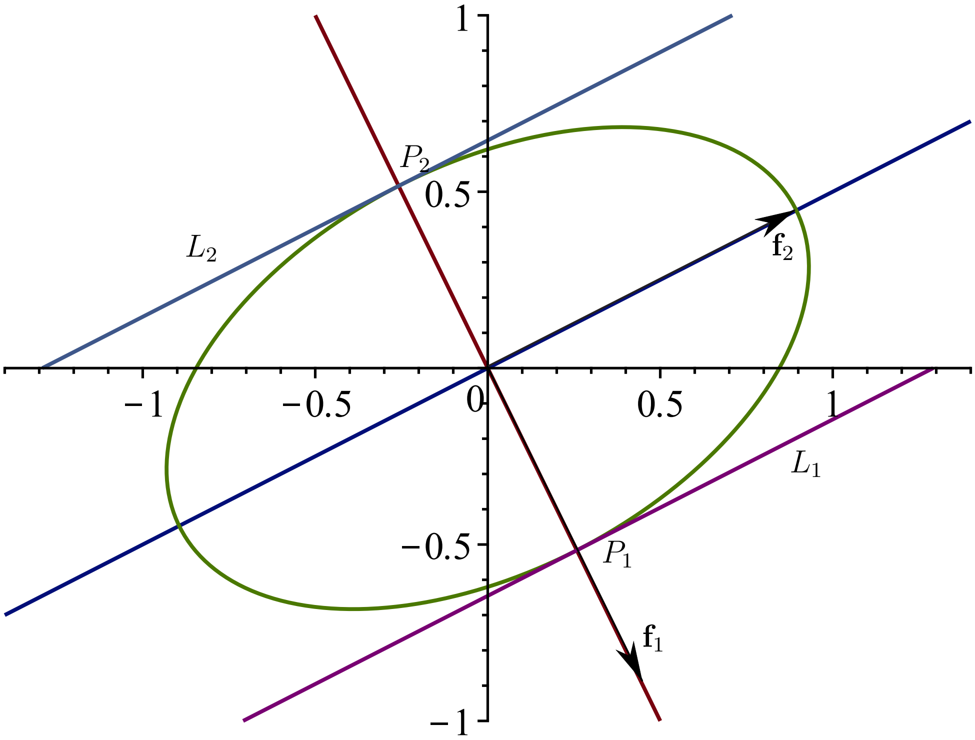
$$\overline{OP} = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{f}_1 + t\mathbf{f}_2 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t\frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{15}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t\frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff t = \frac{\sqrt{5}\left(x_1 - \frac{1}{\sqrt{15}}\right)}{2} = \sqrt{5}\left(x_2 + \frac{2}{\sqrt{15}}\right) \iff x_1 - 2x_2 = \frac{5}{\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{5}{3}}.$$

L_2 kan hanteras på samma sätt.

Nedan visas en figur över situationen.



7. Börja med att bestämma en bas i $V(F)$ genom att parametrisera det definierande ekvationssystemet.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 - x_5 = -r - t \\ -x_4 = -s \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} =$$

$$= r\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r, s, t \in \mathbb{R}.$$

Följaktligen,

$$\mathbf{v}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; V(F) = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3], \; \dim V(F) = 3.$$

Eftersom F är symmetrisk gäller enligt Sats 7.7.9, sid 197 att $N(F) = V(F)^{\perp}$. Om vi skriver ekvationerna som definierar $V(F)$ som skalärprodukter får vi

$$V(F) = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \colon \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \right\},$$

d v s $V(F)$ består av alla vektorer ortogonala mot $\mathbf{u}_1 = (1,0,1,0,1)$ och $\mathbf{u}_2 = (0,1,0,1,0)$. Följaktligen är

$$N(F) = V(F)^{\perp} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$$

och eftersom $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$ är

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en ON-bas i $N(F)$. Ur Sats 6.3.15, sid 150 (Minsta avståndet = Ortogonala avståndet) och Sats 6.3.9, sid 146 hämtar vi

$$\min_{\mathbf{u} \in V(F)} |\mathbf{v} - \mathbf{u}| = \left| \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\| V(F)} \right| = \left| \mathbf{v}_{\perp V(F)} \right| = \left| \mathbf{v}_{\| V(F)^{\perp}} \right| = \left| \mathbf{v}_{\| N(F)} \right|,$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_{\| N(F)} &= (\mathbf{v} \bullet \mathbf{f}_1)\, \mathbf{f}_1 + (\mathbf{v} \bullet \mathbf{f}_2)\, \mathbf{f}_2 = \\
&= \frac{1}{3} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{9}{3} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{6}{2} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \min_{\mathbf{u} \in V(F)} |\mathbf{v} - \mathbf{u}| = \left| \mathbf{v}_{\| N(F)} \right| = 3\sqrt{5}.
\end{aligned}$$