Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ulf Janfalk

Kurskod: TATA31
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA31/TEN1) 2018–01–11, 14–19.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.
För godkänt räcker 9 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ($\geq$ 11p) ht2017 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas) och 16p eller mer ger 4 poäng på uppgift 1. Markera detta genom att skriva ”G” respektive ”G+1” i rutan för uppgift 1.
Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar läggs ut efter skrivtidens slut på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Resultat meddelas via e-post inom 10 arbetsdagar.
Alla koordinater för vektorer och punkter är, om ej annat anges, givna med avseende på ett positivt orienterat ON-system, $\mathbb{R}^n$ är ett euklidiskt rum med standardskalärprodukten och standardbasen ett positivt orienterat ON-system.

(3 p) 1. Låt $a \in \mathbb{R}$ och betrakta de tre planen

$$\Pi_1\colon\ -ax + 6y + 12z = 1, \quad \Pi_2\colon 2ax + 3y + az = 13, \quad \Pi_3\colon\ -2x + 4z = 2.$$

Bestäm a så att de tre planen ***saknar*** gemensamma punkter. För detta (dessa) värden på a, låt L_a vara skärningslinjen mellan Π_1 och Π_2. Bestäm avståndet mellan Π_3 och L_a.

(3 p) 2. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Låt $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara den linjära avbildning som har A^tA som avbildningsmatris i standardbasen. Bestäm n och, om möjligt, en ON-bas av egenvektorer till F.

(3 p) 3. Betrakta underrummet

$$\mathbb{U} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5\colon \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 - 2x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Visa att $\mathbf{u} = (1, -1, -1, 1, 0) \in \mathbb{U}$ och bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$ där $\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}$. Fyll sedan ut denna till en ON-bas i $\mathbb{R}^5$ och ange koordinaterna för vektorn $\mathbf{v} = (-1, 0, 1, 0, 0)$ i den bas du valt

(3 p) 4. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har i standardbasen matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestäm $a \in \mathbb{R}$ så att $\dim N(F) \geq 1$. För detta värde på a, beskriv F geometriskt.

VÄND!

5. Låt $\underline{\mathbf{x}}_3 = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{pmatrix}$ vara standardbasen i $\mathbb{P}_3$, $\underline{\mathbf{x}}_4 = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \end{pmatrix}$ standardbasen i $\mathbb{P}_4$ och $F\colon \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_4$ en linjär avbildning som i baserna ovan har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1 p) (a) Bestäm en bas i nollrummet och ange dess dimension.

(2 p) (b) Beräkna $F(-x + x^2)$ och ange *alla* $\mathbf{q} \in \mathbb{P}_3$ sådana att $F(\mathbf{q}) = F(-x + x^2)$.

I dina svar skall de efterfrågade polynomen skrivas ut som polynom, ej i matrisform.

(3 p) 6. De linjära avbildningarna $F, G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges av

- $F(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$:s ortogonalprojektion i planet $x + y + z = 0$,
- $G(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$:s spegelbild i planet $x - 2y + z = 0$.

Bestäm avbildningsmatrisen till $F \circ G$ i standardbasen. Är $F \circ G = G \circ F$?

(3 p) 7. Vilken sorts kurva definieras av ekvationen

$$5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2 + 20x_1 + 80x_2 + 164 = 0?$$

Rita kurvan noggrannt (i x_1x_2-systemet). Relevanta punkter, avstånd, huvudaxelriktningar etc skall framgå av din figur. ***Figuren skall redovisas på separat papper!*** Välj skala förnuftigt.

Lösningsförslag till TATA31, Linjär algebra, 2018–01–11

1. Gemensamma punkter fås genom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} -ax + 6y + 12z = 1 \\ 2ax + 3y + \ \ az = 3 \\ -2x \qquad + \quad 4z = 2 \end{cases}$$

Skriv på matrisform och beräkna koefficientmatrisens A determinant. Då fås

$$\begin{vmatrix} -a & 6 & 12 \\ 2a & 3 & a \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \overset{r_1-2r_2}{=} \begin{vmatrix} -5a & 0 & 12-2a \\ 2a & 3 & a \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -5a & 12-2a \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 3(24-24a).$$

Determinantkriteriet (Sats 4.7.2, sid 93) ger då att systemet har entydig lösning om ovanstående determinant är skild från 0, d v s $a \neq 1$ och ingen eller oändligt många lösningar om $a = 1$. Insättning av $a = 1$ i ekvationssytemet ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 6 & 12 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 13 \\ -2 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right) \underset{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3-2r_1 \\ r_2/5}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 6 & 12 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & -12 & -20 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{r_3+4r_2 \\ r_1-2r_2/5 \\ -r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right)$$

så sytemet är olösbart då $a = 1$, d v s planen saknar gemensamma punkter om $a = 1$. För att hitta skärningslinjen löser vi det ekvationssystem som fås då vi stryker sista raden i ekvationssytemet ovan. Vi får då

$$L_1\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 5+2z = 5+6t \\ (3-5z)/3 = 1-5t \\ 3t \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Låt $P = (5,1,0)$ och tag $P_0 \in \Pi_3$, t ex $P_3 = (-1,0,0)$. Med $\mathbf{n}_{\Pi_3} = (-1,0,2)$ fås sökt avstånd som $\left|\overline{P_0P}_{\|\mathbf{n}_{\Pi_3}}\right|$, se figur 2.39, sid 53 i boken. Vi får

$$\overline{P_0P} = \overline{OP} - \overline{OP}_0 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{P_0P}_{\|\mathbf{n}_{\Pi_3}} = \frac{\overline{P_0P}\bullet\mathbf{n}_{\Pi_3}}{|\mathbf{n}_{\Pi_3}|^2}\mathbf{n}_{\Pi_3} = \frac{1}{5}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{6}{5}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\left|\overline{P_0P}_{\|\mathbf{n}_{\Pi_3}}\right| = \left|-\frac{6}{5}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \frac{6}{5}\left|\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \frac{6}{5}\sqrt{5}.$$

2. Räknereglerna för transponering (Sats 3.2.13 (d), sid 63) ger att

$$(A^tA)^t = A^tA^{tt} = A^tA,$$

d v s matrisen A^tA är symmetrisk och enligt **Sats 7.7.14**, sid 198 är F symmetrisk och därmed finns det en ON-bas av egenvektorer enligt Spektralsatsen (**Sats 8.3.5**, sid 215). Vi får

$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow n = 3.$$

$$\det\left(A^tA-\lambda I\right)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 2\\ 2 & 5-\lambda & 3\\ 2 & 3 & 5-\lambda\end{vmatrix}\overset{r_3-r_2}{=}\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 2\\ 2 & 5-\lambda & 3\\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 2\\ 2 & 5-\lambda & 3\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}\overset{k_2+k_3}{=}(2-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & 4 & 2\\ 2 & 8-\lambda & 3\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & 4\\ 2 & 8-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)((1-\lambda)(8-\lambda)-8)=$$

$$=(2-\lambda)\left(\lambda^2-9\lambda\right)=0\iff\lambda=0,2,9$$

$$\underline{\underline{\lambda=0}}:\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&2&0\\2&5&3&0\\2&3&5&0\end{array}\right)\overset{\substack{r_2-2r_1\\r_3-2r_1}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&2&0\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&2&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X_0=t\begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\lambda=2}}:\left(\begin{array}{ccc|c}-1&2&2&0\\2&3&3&0\\2&3&3&0\end{array}\right)\overset{\substack{r_3-r_2\\r_2+2r_1}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&2&2&0\\0&7&7&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\Longrightarrow X_2=t\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\lambda=9}}:\left(\begin{array}{ccc|c}-8&2&2&0\\2&-4&3&0\\2&3&-4&0\end{array}\right)\overset{\substack{r_1+4r_2\\r_3-r_2\\r_2\leftrightarrow r_1}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-4&3&0\\0&-14&14&0\\0&7&-7&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}2&-4&3&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X_9=t\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}.$$

Följaktligen, väljer vi t ex

$$\mathbf{f}_1=\frac{1}{\sqrt{18}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix},\quad\mathbf{f}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\quad\mathbf{f}_3=\frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

har vi en ON-bas av egenvektorer.

3. Insättning av $\mathbf{u}$:s koordinater i $\mathbb{U}$:s ekvationer ger

$$\begin{cases}1+(-1)+(-1)+1+0=0\\1+(-1)-2\cdot 0=0\\1+(-1)-(-1)-1=0\end{cases}\Longrightarrow\mathbf{u}\in\mathbb{U},\quad\mathbf{f}_1=\widehat{\mathbf{u}}=\frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

För att få en andra vektor att utgå från vid konstruktion av ON-basen skriver vi systemet som definierar $\mathbb{U}$ på matrisform och löser det.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&0\\1&0&1&0&-2&0\\1&1&-1&-1&0&0\end{array}\right)\overset{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}{\sim}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&0\\0&-1&0&-1&-3&0\\0&0&-2&-2&-1&0\end{array}\right)\overset{\substack{r_1+r_2\\-r_2,-r_3}}{\sim}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&1&0&-2&0\\0&1&0&1&3&0\\0&0&2&2&1&0\end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 + 2x_5 = -s - 4s - 4t = -5s - 4t \\ -x_4 - 3x_5 = -t + 6s + 6t = 6s + 5t \\ s \\ t \\ -2x_3 - 2x_4 = -2s - 2t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \; s, t \in \mathbb{R}.$$

Väljer att ortogonalisera $\mathbf{u}_2 = (-4, 5, 0, 1, -2)$.

$$\mathbf{u}_{2_{\|\mathbf{f}_1}} = (\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{f}_1)\, \mathbf{f}_1 = \frac{1}{4} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-8}{4} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_{2_{\perp\mathbf{f}_1}} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_{2_{\|\mathbf{f}_1}} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{30}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Om man skriver $\mathbb{U}$:s ekvationer som skalärprodukter så kan vi tolka dessa som att

$$\mathbb{U} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 : \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 - 2x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 : \mathbf{x} \perp \begin{array}{l} (1,1,1,1,1) \\ (1,0,1,0,-2) \\ (1,1,-1,-1,0) \end{array} \right\},$$

d v s $\mathbb{U}^\perp = [(1,1,1,1,1), (1,0,1,0,-2), (1,1,-1,-1,0)]$. Då dessa är parvis ortogonala får vi en ON-bas i $\mathbb{U}^\perp$ genom normering, d v s vi sätter

$$\mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \mathbf{f}_4 = \frac{1}{\sqrt{6}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \; \mathbf{f}_5 = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Då vi nu har en ON-mängd i $\mathbb{R}^5$ med "Rätt antal" element har vi en ON-bas i $\mathbb{R}^5$. Användning av $\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}\, T \iff \underline{\mathbf{e}} = \underline{\mathbf{f}}\, T^{-1} = \underline{\mathbf{f}}\, T^t$ ger

$$\mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{f}}\, T^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\mathbf{f}} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ -2/\sqrt{30} & 3/\sqrt{30} & -2/\sqrt{30} & 3/\sqrt{30} & -2/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{6} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{f}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{f}}\, X_{\underline{\mathbf{f}}},$$

d v s $\mathbf{v}$ har koordinatmatrisen $X_{\underline{\mathbf{f}}}$ i basen $\underline{\mathbf{f}}$.

4. Då A är en kvadratisk matris följer det att

$$\dim N(F) \geq 1 \iff 0 = \det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_1+2r_3 \\ r_2+r_3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & a+1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= -(9 - 3(a+1)) = 6 - 3a \iff a = 2.$$

För $a = 2$, beräkna egenvärden och egenvektorer till F.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{r_1+r_2 \; r_3+r_1}{=} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$\overset{k_2-k_3}{=} (3-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2(1-\lambda-1) =$$
$$= -\lambda(3-\lambda)^2 = 0 \iff \lambda = 0,\ 3 \text{ (dubbel)}.$$

Eftersom F är symmetrisk finns en ON-bas av egenvektorer. Byter vi till en sådan ON-bas med $\mathbf{f}_1$ som egenvektor till 0 så fås

$$A_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Då vi också vet att egenrummen till 0 och 3 är ortogonala mot varann (pga symmetrin) ser vi på faktoriseringen av $A_{\underline{\mathbf{f}}}$ att F utför en ortogonalprojektion i planet som är egenrum till 3 följt av en sträckning faktorn 3. Det enda som återstår nu är därför att ta reda på planets ekvation. Då planets normal är egenvektor till 0 räcker det att beräkna egenrummet till $\lambda = 0$.

$$\underline{\underline{\lambda = 0}}: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_1+2r_3 \\ r_2+r_3 \\ r_1 \leftrightarrow r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow X_0 = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Följaktligen är planet Π: $\quad x - y + z = 0$ egenrum till 3 och därmed kan vi säga att

$$F(\mathbf{u}) = 3\mathbf{u}_{\parallel\Pi}.$$

5. (a) För att beräkna $N(F)$ löser vi $AX = \mathit{0}$ på vanligt sätt.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-r_1 \\ r_4-3r_1 \\ r_5-r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-3r_5 \\ r_3-3r_5 \\ r_4-4r_5 \\ r_2 \leftrightarrow r_5}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_5-r_3 \\ -r_3}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

d v s $1 + x + x^2 - x^3$ är en bas i $N(F)$ och $\dim N(F) = 1$.

(b) Skriv $-x + x^2$ på bas·koordinatform och beräkna med hjälp av A. Vi får

$$F(-x + x^2) = F\left(\underline{\mathbf{x}}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \underline{\mathbf{x}}_4 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{x}}_4 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$
$$= 3 - x - 3x^2 + x^4.$$

Återstår att lösa ekvationen $F(\mathbf{q}) = F(-x + x^2) = 3 - x - 3x^2 + x^4$. Då vi vet att $\mathbf{q}_p = -x + x^2$ löser ekvationen så ger **Sats 7.5.9**, sid 185 att alla lösningar kan skrivas som

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_p + \mathbf{q}_h$$

där $\mathbf{q}_h$ är en lösning till $F(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$, d v s $\mathbf{q}_h \in N(F)$. Följaktligen ges alla lösningar till $F(\mathbf{q}) = F(-x + x^2)$ av

$$\mathbf{q} = -x + x^2 + t(1 + x + x^2 - x^3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Alternativ: Det går förstås bra att lösa ekvationen direkt också, d v s lös

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

genom att göra exakt samma radoperationer som då du beräknade $N(F)$.

6. Om $A_{\underline{\mathbf{e}}}$ är matris till F och $B_{\underline{\mathbf{e}}}$ matris till G så är $A_{\underline{\mathbf{e}}}B_{\underline{\mathbf{e}}}$ matris till $F \circ G$ enligt **Sats 7.6.2**, sid 186. Ett alternatic är då att beräkna $A_{\underline{\mathbf{e}}}$ och $B_{\underline{\mathbf{e}}}$ var för sig, t ex som i **Exempel 7.3.4**, sid 175 och sedan beräkna $A_{\underline{\mathbf{e}}}B_{\underline{\mathbf{e}}}$. Råknar man sedan ut $B_{\underline{\mathbf{e}}}A_{\underline{\mathbf{e}}}$ finner man att $A_{\underline{\mathbf{e}}}B_{\underline{\mathbf{e}}} = B_{\underline{\mathbf{e}}}A_{\underline{\mathbf{e}}}$ och därmed är $F \circ G = G \circ F$.
Här skall vi istället utnyttja att de två planen är ortogonala. Då kommer nämligen båda avbildningarna att ha samma egenvektorer. Sätt

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{speglingsplanets normal,}$$

$$\mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{projektionsplanets normal,}$$

$$\mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{3}}\,\underline{\mathbf{e}} \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 1 \\ -2 \end{array} \times \underline{\mathbf{e}} \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 1 \\ 1 \end{array} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\,\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}\,T = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Eftersom F projicerar varje vektor ortogonal mot $\mathbf{f}_2$ på sig själv och $\mathbf{f}_2$ på $\mathbf{0}$ fås

$$F(\mathbf{f}_1) = \mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{f}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F(\mathbf{f}_2) = \mathbf{0}, \quad F(\mathbf{f}_3) = \mathbf{f}_3 = \underline{\mathbf{f}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom G speglar varje vektor ortogonal mot $\mathbf{f}_1$ på sig själv och f_1 på $-\mathbf{f}_1$ fås

$$G(\mathbf{f}_1) = -\mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{f}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G(\mathbf{f}_2) = \mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{f}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G(\mathbf{f}_3) = \mathbf{f}_3 = \underline{\mathbf{f}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow B_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beteckna med $C_{\underline{\mathbf{f}}}$ matrisen till $F \circ G$ i basen $\underline{\mathbf{f}}$ och beräkna den samt därefter med hjälp av basbytesformeln $C_{\underline{\mathbf{e}}}$. Då fås

$$C_{\underline{\mathbf{f}}} = A_{\underline{\mathbf{f}}} B_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow C_{\underline{\mathbf{e}}} = T C_{\underline{\mathbf{f}}} T^{-1} = \left[T^{-1} = T^t \right] = T \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom produkter av diagonalmatriser kommuterar, d v s $A_{\underline{\mathbf{f}}} B_{\underline{\mathbf{f}}} = B_{\underline{\mathbf{f}}} A_{\underline{\mathbf{f}}}$ gäller även $A_{\underline{\mathbf{e}}} B_{\underline{\mathbf{e}}} = B_{\underline{\mathbf{e}}} A_{\underline{\mathbf{e}}}$, d v s $F \circ G = G \circ F$.

7. Skriv på matrisform. Då fås

$$5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2 + 20x_1 + 80x_2 + 164 =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}}_{A_{\underline{\mathbf{e}}}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{X_{\underline{\mathbf{e}}}} + 20 \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 164 = 0. \qquad (1)$$

Beräkna egenvärden och egenvektorer.

$$\det(A_{\underline{\mathbf{e}}} - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(8-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 13\lambda + 36 =$$

$$= (\lambda - 4)(\lambda - 9) = 0 \iff \lambda = 9, 4.$$

$$\underline{\underline{\lambda = 4}} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_4 = t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\underline{\underline{\lambda = 9}} \quad \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_9 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Väljer

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow T = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Insättning av $X_{\underline{\mathbf{e}}} = TX_{\underline{\mathbf{f}}}$ i (1) ger

$$X_{\underline{\mathbf{f}}}{}^t A_{\underline{\mathbf{f}}} X_{\underline{\mathbf{f}}} + 20\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X_{\underline{\mathbf{f}}} + 164 =$$

$$= 4y_1^2 + 9y_2^2 + \frac{20\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} -2 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + 164 =$$

$$= 4y_1^2 + 9y_2^2 + 4\sqrt{5}(-2y_1 + 9y_2) + 164 =$$

$$= 4\left(y_1^2 - 2\sqrt{5}\right) + 9\left(y_2^2 + 4\sqrt{5}y_2\right) + 164 =$$

$$= 4\left(\left(y_1 - \sqrt{5}\right)^2 - 5\right) + 9\left(\left(y_2 + 2\sqrt{5}\right)^2 - 20\right) + 164 = 0$$

$$4\left(y_1 - \sqrt{5}\right)^2 + 9\left(y_2 + 2\sqrt{5}\right)^2 - 36 = 0 \iff$$

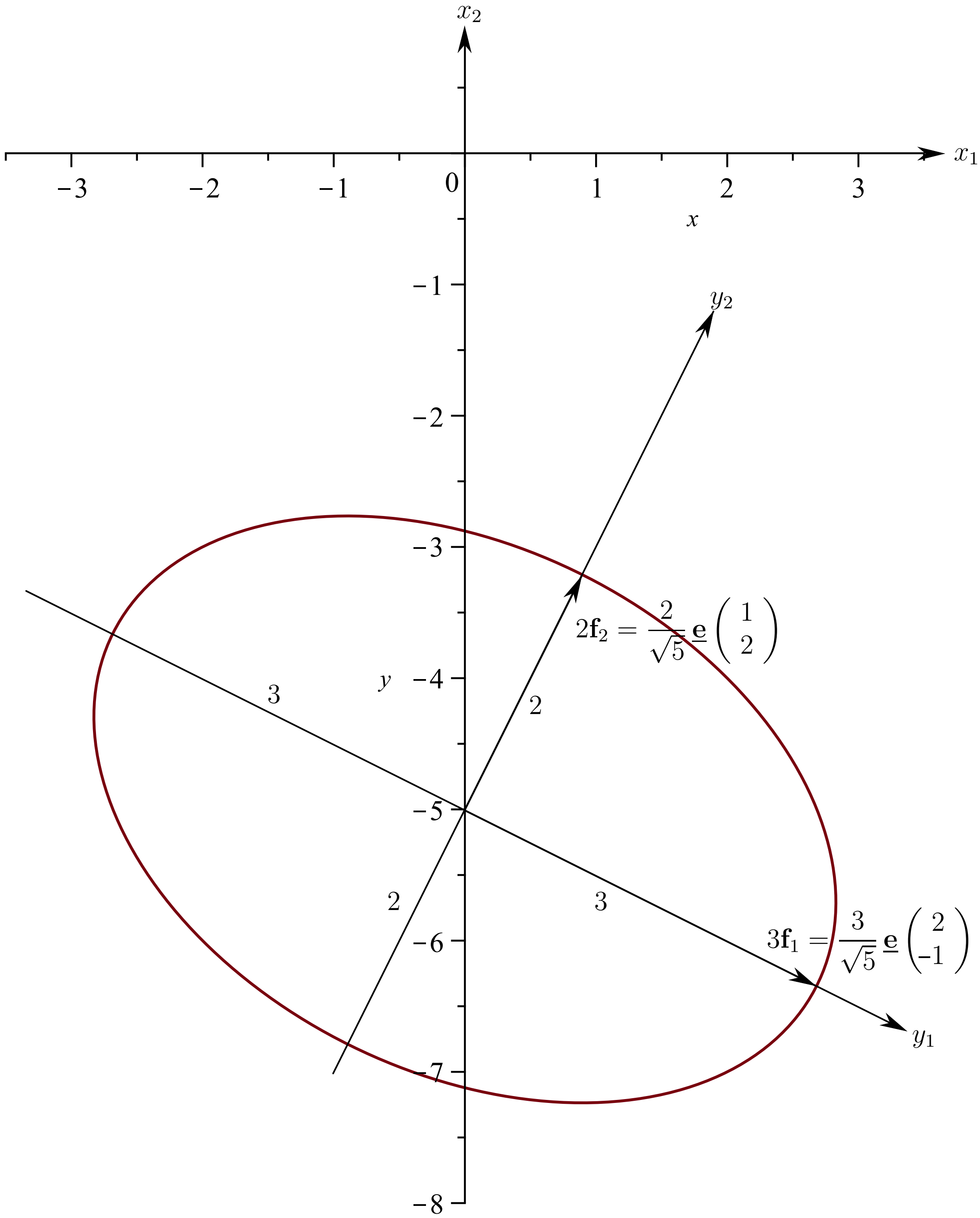
$$\iff 4\left(y_1 - \sqrt{5}\right)^2 + 9\left(y_2 + 2\sqrt{5}\right)^2 = 36 \iff$$

$$\iff \frac{\left(y_1 - \sqrt{5}\right)^2}{9} + \frac{\left(y_2 + 2\sqrt{5}\right)^2}{4} = \left(\frac{y_1 - \sqrt{5}}{3}\right)^2 + \left(\frac{y_2 + 2\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1,$$

d v s kurvan är en ellips med halvaxellängderna 3 och 2 i $\mathbf{f}_1$-riktning respektive $\mathbf{f}_2$-riktning och medelpunkt M där

$$\overline{OM} = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ -2\sqrt{5} \end{pmatrix} = [\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}T] = \sqrt{5}\frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

vilket ger följande figur.



x_2
x_1
-3
-2
-1
0
1
2
3
x
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
y_2
y_1
y
$2\mathbf{f}_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$
$3\mathbf{f}_1 = \frac{3}{\sqrt{5}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$
3
2
2
3