LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Ulf Janfalk

Kurskod: TATA31
Provkod: KTR1

Kontrollskrivning i Linjär algebra 2017–10–18, 14–18.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.
På uppgift 1–14 skall ***endast svar*** ges. Varje rätt svar ger 1 poäng, fel svar 0 poäng. Flera svar får och bör ges på samma blad
Uppgift 15 och 16 ger tre poäng vardera; ***fullständiga och välmotiverade lösningar krävs.***
Minst 11 poäng tillgodoräknas som tre poäng på uppgift 1 på tentamen.
Minst 16 poäng ger ytterligare en bonuspoäng på tentamen.
Rätten att tillgodoräkna sig bonus består under läsåret 2017-2018.
Resultatet meddelas via e-post. Lösningar läggs ut efter skrivtidens slut på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Om inget annat sägs, är alla koordinater för vektorer i planet och rummet givna relativt en högerorienterad ON-bas.

1. Ange, i parameterform, lösningsmängden (kalla variablerna $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$) till ekvationssystemet som i matrisform har totalmatrisen

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

2. Betrakta matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Beräkna den/de av uttrycken nedan som är definierade:

$$A + B^t, \qquad BA, \qquad AB, \qquad AB^t.$$

3. Rita ett vanligt rätvinkligt koordinatsystem (höger ON) och låt **fem rutor** svara mot **en längdenhet**. Låt $\underline{\mathbf{e}}$ vara en ON-bas där $\mathbf{e}_1$ pekar i den horisontella koordinataxelns riktning och $\mathbf{e}_2$ i den lodräta axelns riktning. Rita i detta koordinatsystem in, så exakt som möjligt, vektorerna $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, den ortogonala projektionen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$ och den ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{u}$.

4. Låt $\quad \mathbf{u}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{u}_2 = 7\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 \quad$ och $\quad \mathbf{v} = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2.$
Skriv $\mathbf{v}$ som linjärkombination av $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$.

5. Låt $P = (-1, 3)$ och $Q = (5, 7)$. Bestäm ekvationen på *normalform* till den linje som går genom mittpunkten på sträckan mellan P och Q och som är vinkelrät mot vektorn $\overline{PQ}$.

6. Ange en *enhetsvektor* som är ortogonal mot $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

7. En parallellogram har hörn i punkterna $(1, 0, 1), (0, 1, 2), (2, 1, 2)$ och $(1, 2, 3)$. Bestäm dess area.

8. Linjen L har riktningsvektorn $\mathbf{v}=3\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$ och går genom punkten $P_0=(1, -1, 1)$. Bestäm avståndet mellan L och punkten $P = (2, 0, 3)$.

9. Bestäm skärningspunkten, om det finns en, mellan linjerna L_1 och L_2 nedan:

$$L_1 \colon \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}, \quad L_2 \colon \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ t \in \mathbb{R}.$$

10. Betrakta underrummet $\mathbb{U}$ av $\mathbb{R}^4$ definierat genom

$$\mathbb{U} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon \begin{array}{c} 4x_1 - x_2 + 2x_3 \qquad = 0 \\ \text{och} \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

och låt

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, -2, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 1, -1, -1), \quad \mathbf{v}_3 = (1, 2, -1, -2), \quad \mathbf{v}_4 = (1, 0, -1, 2).$$

Vilken/vilka av $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4$ tillhör $\mathbb{U}$?

11. Skriv vektorn $\mathbf{v} = (7, -3, 1)$ som $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ där $\mathbf{v}_1$ ligger i planet $3x - 2y + z = 0$ och $\mathbf{v}_2$ är vinkelrät mot samma plan.

12. Betrakta matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -11 & 3 \\ b & 7 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestäm, om möjligt, talen $a, b \in \mathbb{R}$ så att $B = A^{-1}$.

13. Beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} e & \ln 2 & e \\ \pi & 0 & \pi \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

14. Lös matrisekvationen $\quad X = XA + B^t \quad$ där

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

(3 p) 15. Planet Π går genom punkterna $(1,1,1),(2,0,0),(0,-2,1)$. Bestäm avståndet mellan Π och punkten $P=(4,3,-4)$ samt vilken punkt i Π som ligger närmast P.

(3 p) 16. Betrakta

$$\mathbb{U}_a = [(a,-1,0,1),\ (2,-1,-1,1),\ (a,3,2,-1),\ (5,3,-2,-1)].$$

För vilket(vilka) värde(n) på $a \in \mathbb{R}$ är vektorerna som genererar $\mathbb{U}_a$ linjärt beroende? För det (dessa) värde(n) på a, beskriv $\mathbb{U}_a$ med så få vektorer som möjligt och avgör därefter för vilka värden på $b \in \mathbb{R}$ som $(1,1,b,1) \in \mathbb{U}_a$.

Lösningsförslag till TATA31. Linjär algebra, 2017–10–18

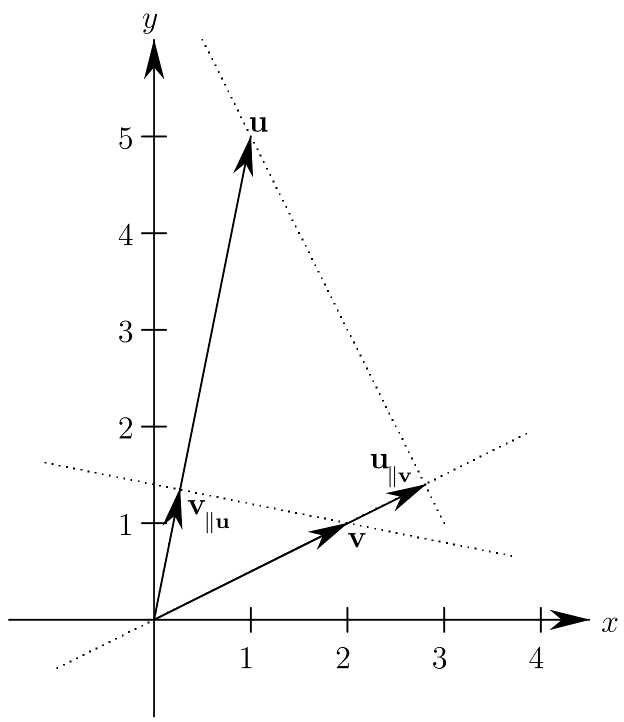
1.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

2. Den enda som inte är definierad är AB^t.

$$A + B^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

3.



4. $\mathbf{v} = -11\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 \quad \left(= -11\,\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\,\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -22 + 21 \\ -11 + 12 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

5. $3x + 2y = 16$

6. $\mathbf{w} = \dfrac{1}{\sqrt{45}}\,\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ eller $-\mathbf{w}$

7. $2\sqrt{2}$

8. $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

9. $(3, 0, 1)$

10. $\mathbf{v}_3 \in \mathbb{U}, \quad \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4 \notin \mathbb{U}$

11. $\mathbf{v}_1 = (1, 1, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (6, -4, 2)$

12. $a = 1$, $b = -2$

13. $-\pi \ln 2$

14. $X = \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ 19 & 12 \\ 24 & 15 \end{pmatrix}$

15. Bestäm planets ekvation på normalform.
Sätt $P_1 = (1, 1, 1), P_2 = (2, 0, 0), P_3 = (0, -2, 1)$ så att

$$\overline{P_1P_2} = \overline{OP}_2 - \overline{OP}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\overline{P_1P_3} = \overline{OP}_3 - \overline{OP}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

och beräkna sedan planets normal.

$$\mathbf{n} \parallel \overline{P_1P_2} \times \overline{P_1P_3} = \underline{\mathbf{e}}\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ 1 \\ -1 \end{array} \times \underline{\mathbf{e}}\begin{array}{c}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -1 \\ -3 \end{array} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = -\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

så att Π:s ekvation på normalform blir

$$\Pi\colon 3x - y + 4z = D, \quad P_2 \in \Pi \Longrightarrow 3 \cdot 2 - 0 + 4 \cdot 0 = 6 = D,$$

d v s $\Pi : \ 3x - y + 4z = 6$. Rita själv figur eller se figur 2.39, sid 53 i boken. Beräkna vektorn $\overline{P_2P}$ och dess ortogonalprojektion på $\mathbf{n}$.

$$\overline{P_2P} = \overline{OP} - \overline{OP}_2 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$\overline{P_2P}_{\parallel\mathbf{n}} = \frac{\overline{P_2P} \bullet \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n} = \frac{1}{26}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\mathbf{n} = \frac{-13}{26}\mathbf{n} = -\frac{1}{2}\mathbf{n} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \text{avståndet} = \left|\overline{P_2P}_{\parallel\mathbf{n}}\right| = \left|-\frac{1}{2}\mathbf{n}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{26}.$$

Ortsvektorn för den närmsta punkten, P_p fås sedan som

$$\overline{OP}_p = \overline{OP} - \overline{P_2P}_{\|\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\3\\-4\end{pmatrix} - \frac{-1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}8\\6\\-8\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}11\\5\\-4\end{pmatrix},$$

d v s $P_p = (11/2, 5/2, -2)$.

16. Kalla de genererande vektorerna $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ och ställ upp beroendeekvationen,

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3 + \lambda_4\mathbf{u}_4 = 0.$$

I matrisform blir detta

$$\underbrace{\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}a & 2 & a & 5\\-1 & -1 & 3 & 3\\0 & -1 & 2 & -2\\1 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix}}_{A_a}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Enligt Korollarium 4.7.2, sid 93 gäller att denna matrisekvation är entydigt lösbar omm $\det A_a \neq 0$. Då det är ett homogent ekvationssystem och sådana alltid är lösbara (Sats 3.4.6, sid 71) följer det att ekvationssystemet har oändligt många lösningar om $\det A_a = 0$. Ur detta följer då att vektorerna $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ är linjärt oberoende om $\det A_a \neq 0$ och linjärt beroende om $\det A_a = 0$.

$$\det A_a = \begin{vmatrix}a & 2 & a & 5\\-1 & -1 & 3 & 3\\0 & -1 & 2 & -2\\1 & 1 & -1 & -1\end{vmatrix} \overset{\substack{k_3+2k_2\\k_4-2k_2}}{=} \begin{vmatrix}a & 2 & a+4 & 1\\-1 & -1 & 1 & 5\\0 & -1 & 0 & 0\\1 & 1 & 1 & -3\end{vmatrix} = (-1)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}a & a+4 & 1\\-1 & 1 & 5\\1 & 1 & -3\end{vmatrix} \overset{\substack{k_2-k_1\\k_3+3k_1}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix}a & 4 & 1+3a\\-1 & 2 & 2\\1 & 0 & 0\end{vmatrix} = 1(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}4 & 1+3a\\2 & 2\end{vmatrix} = 8 - 2(1+3a) = 6 - 6a = 0 \iff$$

$$\iff a = 1.$$

De genererande vektorerna är alltså linjärt beroende då $a = 1$ och linjärt oberoende för $a \neq 1$. Med $a = 1$, lös beroendeekvationen samt ekvationen

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3 + \lambda_4\mathbf{u}_4 = (1, 1, b, 1).$$

Vi får systemen

$$\left(\begin{array}{cccc|cc}1 & 2 & 1 & 5 & 0 & 1\\-1 & -1 & 3 & 3 & 0 & 1\\0 & -1 & 2 & -2 & 0 & b\\1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right) \overset{\substack{r_2+r_1\\r_4-r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cc}1 & 2 & 1 & 5 & 0 & 1\\0 & 1 & 4 & 8 & 0 & 2\\0 & -1 & 2 & -2 & 0 & b\\0 & -1 & -2 & -6 & 0 & 0\end{array}\right) \overset{\substack{r_3+r_2\\r_4+r_2}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 8 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 0 & 2+b \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \underset{r_3 \leftrightarrow r_4/2}{\overset{r_3-3r_4}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 8 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-4 \end{array}\right).$$

Vi börjar med att lösa beroendeekvationen. Vi får

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda_2 - \lambda_3 - 5\lambda_4 = 4t \\ -4\lambda_3 - 8\lambda_4 = -4t \\ -\lambda_4 = -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Insättning i beroendeekvationen (välj $t = 1$ för enkelhets skull) ger då

$$4\mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4 = \mathbf{0} \iff \mathbf{u}_4 = -4\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3,$$

d v s enligt Sats 5.3.16, sid 111 kan $\mathbf{u}_4$ strykas utan att höljet ändras.
Vad gäller ekvationen

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3 + \lambda_4\mathbf{u}_4 = (1, 1, b, 1)$$

ger kalkylen ovan att ekvationen är lösbar omm $b = 4$, d v s $(1, 1, 4, 1) \in \mathbb{U}$ och $(1, 1, b, 1) \notin \mathbb{U}$ om $b \neq 4$.