Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ulf Janfalk

Kurskod: TATA31
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA31/TEN1) 2017–08–19, 14–19.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.
För godkänt räcker 9 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ($\geq$ 11p) ht2016 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas) och 16p eller mer ger 4 poäng på uppgift 1. Markera detta genom att skriva ”G” respektive ”G+1” i rutan för uppgift 1.
Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar läggs ut efter skrivtidens slut på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Resultat meddelas via e-post inom 10 arbetsdagar.
Alla koordinater för vektorer och punkter är, om ej annat anges, givna med avseende på ett positivt orienterat ON-system, $\mathbb{R}^n$ är ett euklidiskt rum med standardskalärprodukten och standardbasen ett positivt orienterat ON-system.

(2 p) 1. (a) Låt L_1 vara linjen genom $(2, 2, 4)$ med riktningsvektor $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ och låt Π vara planet med ekvation $x - y + 2z = 3$. Bestäm skärningspunkten P mellan Π och L_1. Ange därefter linjen L_2 genom P som är ortogonal mot L_1 och ligger i Π.

(1 p) (b) Beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{vmatrix}.$$

(3 p) 2. Låt $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning sådan att $F(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$:s spegling i planet $x + z = 0$. Ange F:s egenvärden med tillhörande *egenrum* samt F:s matris i en bas av egenvektorer och i standardbasen.

3. Låt

$$\mathbb{U} = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4\colon x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0\right\}.$$

(2 p) (a) Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$.

(1 p) (b) Beräkna avståndet mellan $\mathbf{v} = (1, 1, 1, 1)$ och $\mathbb{U}$.

(3 p) 4. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definieras av

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4\ ,\ x_1 + 3x_2 - x_3 + ax_4).$$

Bestäm $a \in \mathbb{R}$ så att $(-1, 0, 1, 1)$ tillhör F:s nollrum. Ange sedan F:s matris relativt standardbaserna i $\mathbb{R}^4$ och $\mathbb{R}^2$ samt en bas i nollrummet.

VÄND!

5. Låt $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ och

$$Q(\mathbf{u}) = 13x_1^2 + 10x_2^2 + 13x_3^2 - 4x_1x_2 - 10x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

(1 p) (a) Bestäm det största respektive minsta värde $Q(\mathbf{u})$ kan anta då $|\mathbf{u}| = \pi$.

(2 p) (b) Bestäm minsta avståndet från ytan $Q(\mathbf{u}) = 6$ till origo samt i vilka punkter detta minsta avstånd antas.

(2 p) 6. (a) Underrummet $\mathbb{U} \subset \mathbb{P}_4$ definieras som

$$\mathbb{U} = \left[\begin{array}{c} 1 + x^2 + x^4, \quad 1 - x + 2x^2 + x^3 + x^4, \quad 2 - 3x + 2x^2 + 2x^3 + x^4, \\ -2 - x + 2x^2 + 2x^3 - x^4, \quad 1 - 3x + x^2 + 2x^3 \end{array}\right].$$

Ange en bas i $\mathbb{U}$ samt dimensionen av $\mathbb{U}$.

(1 p) (b) Låt

$$\mathbb{V} = \left[3 - bx - x^2 + 2x^3, 1 - 4x - x^2 + 2x^3 - x^4\right].$$

Finns det något värde på $b \in \mathbb{R}$ så att $\mathbb{V}$ är ett underrum av $\mathbb{U}$?

(3 p) 7. För alla värden på $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (ej båda $= 0$), bestäm $a \in \mathbb{R}$ så att gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

existerar ändligt och är skilt från $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ange också gränsvärdet i varje fall.

Lösningsförslag till TATA31, Linjär algebra, 2017–08–19

1. (a) Ekvationen för L_1 på parameterform blir

$$L_1.\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Skärningspunktens P t-värde beräknas genom insättning av L_1 i Π:s ekvation. Vi får

$$x - y + 2z = (2+t) - (2+2t) + 2(4+3t) = 5t + 8 = 3 \iff t = -1 \implies$$
$$\implies \overline{OP} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Då L_2 skall ligga i Π måste riktningsvektorn $\mathbf{v}_{L_2}$ vara ortogonal mot planets normal $\mathbf{n} = (1, -1, 3)$. Då L_2 skulle vara ortogonal även mot L_1 följer det att

$$\mathbf{v}_{L_2} \parallel \mathbf{n} \times \mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}}\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ 1 \\ -1 \end{array} \times \underline{\mathbf{e}}\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ 1 \\ 2 \end{array} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = -\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies L_2\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(b) För att underlätta kalkylen ordnar vi så att vi får heltal i varje position

$$\begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_1 \to 6r_1 \\ r_2 \to 12r_2 \\ r_3 \to 60r_3}}{=} \frac{1}{2\cdot 6^3\cdot 10}\begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \\ 20 & 15 & 12 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 \to 3r_3}}{=} \frac{1}{2\cdot 3\cdot 6^3\cdot 10}\begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 60 & 45 & 36 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{r_3 - 10r_1}{=} \frac{1}{2\cdot 3\cdot 6^3\cdot 10}\begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Utveckla efter} \\ \text{rad 1} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{6}{2\cdot 3\cdot 6^3\cdot 10}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 15 & 16 \end{vmatrix} = \frac{1}{6^3\cdot 10}\left(= \frac{1}{3\cdot 6!} = \frac{1}{2160}\right)$$

2. Låt $\mathbf{n} = (1, 0, 1) =$ planets normal och beteckna med $\mathbf{v}$ en godtycklig vektor i planet. För en spegling gäller

$$F(\mathbf{n}) = -\mathbf{n} \qquad \text{och} \qquad F(\mathbf{v}) = \mathbf{v}.$$

Följaktligen är $\mathbf{n}$ en egenvektor med egenvärde -1 och $[\mathbf{n}]$ är egenrummet. Vidare, varje vektor i planet är en egenvektor med egenvärde 1 så egenrummet till 1 är planet självt. Med $\mathbf{f}_1 = \hat{\mathbf{n}}$ och $\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ en ON-bas för planet har vi en ON-bas för hela $\mathbb{R}^3$. Vi kan, t ex välja

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_2,\ \text{d v s}\ \underline{\mathbf{f}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Detta ger att F:s matris i en bas av egenvektorer blir

$$A_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom standardbasen och egenbasen båda är ON-baser följer det att T är ortonormal, d v s $T^{-1} = T^t$. Basbytesformeln ger sedan

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = T A_{\underline{\mathbf{f}}} T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} T \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Skulle vi parametrisera $\mathbb{U}$:s definierande ekvation skulle vi behöva tre paramterar, d v s $\dim \mathbb{U} = 3$.

   (a) Följaktligen behöver vi tre vektorer till vår ON-bas. Välj två ortogonala vektorer i $\mathbb{U}$, t ex $\mathbf{u}_1 = (2, 1, 0, 0)$, $\quad \mathbf{u}_2 = (0, 0, 3, 1)$. Välj sedan en tredje vektor i $\mathbb{U}$ som inte är en linjärkombination av $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$, t ex $\mathbf{u}_3 = (0, 1, 2, 0)$. Sätt $\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_1$, $\mathbf{f}_2 = \widehat{\mathbf{u}}_2$ och ortogonalisera $\mathbf{u}_3$ med hjälp av Gram-Schmidtprocessen. Vi får

$$\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2 = \widehat{\mathbf{u}}_2 \frac{1}{\sqrt{10}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{3_{\|[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} &= (\mathbf{u}_3 \bullet \mathbf{f}_1)\, \mathbf{f}_1 + (\mathbf{u}_3 \bullet \mathbf{f}_2)\, \mathbf{f}_2 = \\ &= \frac{1}{5} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &\quad + \frac{1}{10} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{5} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{6}{10} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{u}_{3_{\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} &= \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_{3_{\|[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = \frac{1}{5} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{5} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{f}_3 = \widehat{\mathbf{u}}_{3_{\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = \frac{1}{\sqrt{30}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\4\\1\\-3\end{pmatrix}$$

och vi har att $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ är en ON-bas i $\mathbb{U}$.

(b) Enligt sats 6.3.15, sid 150 är minsta avståndet det ortogonala avståndet, d v s

$$\min_{\mathbf{u}\in\mathbb{U}} |\mathbf{v}-\mathbf{u}| = \left|\mathbf{v}-\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}\right| = \left|\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}\right|.$$

Med $\mathbf{v} = (1,1,1,1)$ fås

$$\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = (\mathbf{v}\bullet\mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 + (\mathbf{v}\bullet\mathbf{f}_2)\,\mathbf{f}_2 + (\mathbf{v}\bullet\mathbf{f}_3)\,\mathbf{f}_3 =$$

$$= \frac{3}{5}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{4}{10}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\0\\3\\1\end{pmatrix} + \frac{0}{30}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\4\\1\\-3\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}6\\3\\6\\2\end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}} = \mathbf{v}-\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = \frac{1}{5}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}5\\5\\5\\5\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}6\\3\\6\\2\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{5}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\\3\end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left|\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}\right| = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

4. Insättning ger

$$F(-1,0,1,1) = (-1+2-1, -1-1+a) = (0, a-2) = (0,0) \iff a = 2.$$

Låt $\underline{\mathbf{e}}_4$ och $\underline{\mathbf{e}}_2$ vara standardbaserna i $\mathbb{R}^4$ respektive $\mathbb{R}^2$. Skriver vi de inblandade vektorerna i "bas·koordinatform" fås

$$\begin{aligned}
F(x_1,x_2,x_3,x_4) &= F\left(\underline{\mathbf{e}}_4\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\right) = \\
&= (x_1+2x_2+2x_3-x_4,\ x_1+3x_2-x_3+2x_4) = \\
&= \underline{\mathbf{e}}_2\begin{pmatrix}x_1+2x_2+2x_3-x_4\\ x_1+3x_2-x_3+ax_4\end{pmatrix} = \\
&= \underline{\mathbf{e}}_2\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&2&-1\\1&3&-1&2\end{pmatrix}}_{A_{\underline{\mathbf{e}}_4,\underline{\mathbf{e}}_2}}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

d v s matrisen $A_{\underline{\mathbf{e}}_4,\underline{\mathbf{e}}_2}$ är F:matris med avseende på standardbaserna i $\mathbb{R}^4$ och $\mathbb{R}^2$. För att beräkna $N(F)$ löser vi $A_{\underline{\mathbf{e}}_4,\underline{\mathbf{e}}_2}X = \mathit{0}$ på vanligt sätt

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&2&-1&0\\1&3&-1&2&0\end{array}\right) \overset{r_2-r_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c}1&2&2&-1&0\\0&1&-3&3&0\end{array}\right) \overset{r_1-2r_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&8&-7&0\\0&1&-3&3&0\end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8s+7t \\ 3s-3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s,t \in \mathbb{R},$$

d v s $(-8,3,1,0)$, $(7,-3,0,1)$ är en bas i $N(F)$.

5. Skriv Q på matrisform och beräkna egenvärdena.

$$Q(\mathbf{u}) = 13x_1^2 + 10x_2^2 + 13x_3^2 - 4x_1x_2 - 10x_1x_3 - 4x_2x_3 =$$
$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & -2 & -5 \\ -2 & 10 & -2 \\ -5 & -2 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = X^t AX$$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 13-\lambda & -2 & -5 \\ -2 & 10-\lambda & -2 \\ -5 & -2 & 13-\lambda \end{vmatrix} \overset{r_3-r_1}{=} \begin{vmatrix} 13-\lambda & -2 & -5 \\ -2 & 10-\lambda & -2 \\ \lambda-18 & 0 & 18-\lambda \end{vmatrix} \overset{k_1+k_3}{=}$$
$$= (\lambda-18) \begin{vmatrix} 8-\lambda & -2 & 0 \\ -4 & 10-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-18) \begin{vmatrix} 8-\lambda & -2 \\ -4 & 10-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (\lambda-18)((8-\lambda)(10-\lambda)-8) = (\lambda-18)\left(\lambda^2-18\lambda+72\right) =$$
$$= (\lambda-18)(\lambda-12)(\lambda-6) = 0 \iff \lambda = 18, 12, 6.$$

(a) Enligt Sats 9.1.11, sid 227 gäller att

$$\lambda_{\text{min}} |\mathbf{u}|^2 \le Q(\mathbf{u}) \le \lambda_{\text{max}} |\mathbf{u}|^2$$

med likhet då $\mathbf{u}$ är en egenvektor till respektive egenvärde. I vårt fall är $\lambda_{\text{min}} = 6$, $\lambda_{\text{max}} = 18$ och $|\mathbf{u}| = \pi$ så min-värdet blir $6 \cdot \pi^2$ och max-värdet $18 \cdot \pi^2$.

(b) Sats 9.1.11, sid 227 ger i denna nya situation att

$$6\,|\mathbf{u}|^2 \le Q(\mathbf{u}) = 6 \le 18\,|\mathbf{u}|^2$$

med likhet i den vänstra då $\mathbf{u}$ är en egenvektor till 6 och i den högra då $\mathbf{u}$ är en egenvektor till 18. Då vi söker den närmaste punkten är den vänstra olikheten ointressant och den högra ger

$$18\,|\mathbf{u}|^2 \ge 6 \iff |\mathbf{u}|^2 \ge \frac{1}{3} \iff |\mathbf{u}| \ge \frac{1}{\sqrt{3}},$$

med likhet då $\mathbf{u}$ är en egenvektor till 18, d v s om $Q(\mathbf{u}) = 6$ och $\mathbf{u}$ är en egenvektor till $\lambda_{\text{max}} = 18$ så är $|\mathbf{u}| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Beräkna egenvektorerna till $\lambda = 18$.

$$(A-18I)X = 0 \iff \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & -5 & 0 \\ -2 & -8 & -2 & 0 \\ -5 & -2 & -5 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3-r_1 \\ -r_2/2 \\ r_1 \leftrightarrow r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{r_2-5r_1}{\sim}$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{18} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Låt

$$\widehat{\mathbf{u}}_{18} = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},$$

d v s en egenvektor av längd 1 till egenvärdet 18. Punkterna närmast origo, på avstånd $1/\sqrt{3}$ är alltså de som har $\pm\widehat{\mathbf{u}}_{18}/\sqrt{3}$ som ortsvektor, dvs

$$P = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1) = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1,0,-1)$$

är de punkter på ytan som ligger närmast origo.

6. Kalla de genererande polynomen $\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_5$, ställ upp beroendeekvationen samt "linjärkombination= godtyckligt polynom", skriv som ekvationssystem på vanligt sätt och lös. Vi får

$$\lambda_1\mathbf{p}_1+\lambda_2\mathbf{p}_2+\lambda_3\mathbf{p}_3+\lambda_4\mathbf{p}_4+\lambda_5\mathbf{p}_5=\mathbf{0},\quad a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4 \Longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|cc}1&1&2&-2&1&0&a_0\\0&-1&-3&-1&-3&0&a_1\\1&2&2&2&1&0&a_2\\0&1&2&2&2&0&a_3\\1&1&1&-1&0&0&a_4\end{array}\right)\underset{\sim}{\overset{r_3-r_1}{r_5-r_1}}\left(\begin{array}{ccccc|cc}1&1&2&-2&1&0&a_0\\0&-1&-3&-1&-3&0&a_1\\0&1&0&4&0&0&-a_0+a_2\\0&1&2&2&2&0&a_3\\0&0&-1&1&-1&0&-a_0+a_4\end{array}\right)\overset{\substack{r_3+r_2\\r_4+r_2\\r_3\leftrightarrow r_4}}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|cc}1&1&2&-2&1&0&a_0\\0&-1&-3&-1&-3&0&a_1\\0&0&-1&1&-1&0&a_1+a_3\\0&0&-3&3&-3&0&-a_0+a_1+a_2\\0&0&-1&1&-1&0&-a_0+a_4\end{array}\right)\overset{\substack{-r_4-3r_3\\-r_5-r_3\\-r_3\\-r_2}}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|cc}1&1&2&-2&1&0&a_0\\0&1&3&1&3&0&-a_1\\0&0&1&-1&1&0&-a_1-a_3\\0&0&0&0&0&0&a_0+2a_1-a_2+3a_3\\0&0&0&0&0&0&a_0+a_1+a_3-a_4\end{array}\right)\qquad(1)$$

(a) Vi börjar med beroendeekvationen. Ur (1) följer

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\\\lambda_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda_1-\lambda_2-2\lambda_3+2\lambda_4-\lambda_5=4s+t\\-3\lambda_3-\lambda_4-3\lambda_5=-4s\\\lambda_4-\lambda_5=s-t\\s\\t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}4\\-4\\1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\quad s,t\in\mathbb{R}$$

$\underline{\underline{s=1,t=0}}:\quad 4\mathbf{p}_1-4\mathbf{p}_2+\mathbf{p}_3+\mathbf{p}_4=\mathbf{0}\iff\mathbf{p}_4=-4\mathbf{p}_1+4\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3$

$\underline{\underline{s=0,t=1}}:\quad \mathbf{p}_5=-\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_3.$

Följaktligen kan $\mathbf{p}_4$ och $\mathbf{p}_5$ utses till löjliga element enligt sats 5.3.16, sid 111. Därmed gäller att $\mathbb{U}=[\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3]$ och $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3$ är linjärt oberoende. Följaktligen är de en bas i $\mathbb{U}$ och därmed är $\dim\mathbb{U}=3$.

(b) Ur (1) följer att ett godtyckligt polynom är en linjärkombination av de genererande polynomen $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_5$ omm $a_0+2a_1-a_2+3a_3=0$ och $a_0+a_1+a_3-a_4=0$, d v s

$$\mathbb{U}=\left\{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4\in\mathbb{P}_4\colon\ \begin{array}{l} a_0+2a_1-a_2+3a_3=0\\ a_0+a_1+a_3-a_4=0\end{array}\right\}.$$

Insättning av $\mathbb{V}$:s genererande polynom i $\mathbb{U}$:s ekvationer ger

$$1-4x-x^2+2x^3-x^4\colon\ \begin{array}{ll} a_0+2a_1-a_2+3a_3 & =1+2(-4)-(-1)+3\cdot 2=0\\ a_0+a_1+a_3-a_4= & 1-4+2-(-1)=0\end{array},$$

d v s $1-4x-x^2+2x^3-x^4\in\mathbb{U}$ och

$$3-bx-x^2+2x^3\colon\ \begin{array}{ll} a_0+2a_1-a_2+3a_3 & =3+2(-b)-(-1)+3\cdot 2=10-2b=0\\ a_0+a_1+a_3-a_4= & 3-b+2=5-b=0\end{array},$$

d v s $3-bx-x^2+2x^3\in\mathbb{U}$ omm $b=5$. Följaktligen är $\mathbb{V}$ ett underrum av $\mathbb{U}$ omm $b=5$.

7. Beräkna egenvärden och egenvektorer till matrisen.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ -1 & 4-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(4-\lambda)+2=\lambda^2-5\lambda+6=0\iff\lambda=2,3$$

$$\underline{\underline{\lambda=2}}:\quad\left(\begin{array}{cc|c}-1&2&0\\-1&2&0\end{array}\right)\Longrightarrow X_2=t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\lambda=3}}:\quad\left(\begin{array}{cc|c}-2&2&0\\-2&2&0\end{array}\right)\Longrightarrow X_2=t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}.$$

Följaktligen har vi en bas av egenvektorer till $A=A_{\underline{\mathbf{e}}}$. Sätter vi

$$\mathbf{f}_1=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\quad \mathbf{f}_2=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

fås

$$\underline{\mathbf{f}}=\underline{\mathbf{e}}T=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\Longrightarrow T^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix},\ A_{\underline{\mathbf{f}}}=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix},\ A_{\underline{\mathbf{f}}}^n=\begin{pmatrix}2^n&0\\0&3^n\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}A_{\underline{\mathbf{e}}}^n\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}&=TA_{\underline{\mathbf{f}}}^nT^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=TA_{\underline{\mathbf{f}}}^n\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}2^n&0\\0&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha-\beta\\-\alpha+2\beta\end{pmatrix}=\\
&=T\left(\begin{pmatrix}2^n(\alpha-\beta)\\3^n(-\alpha+2\beta)\end{pmatrix}\right)=T\left(2^n(\alpha-\beta)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+3^n(-\alpha+2\beta)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=\\
&=2^n(\alpha-\beta)\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+3^n(-\alpha+2\beta)\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\\
&=2^n(\alpha-\beta)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+3^n(-\alpha+2\beta)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\Longrightarrow\end{aligned}$$

$$\frac{1}{a^n}A_{\underline{\mathbf{e}}}^n\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\frac{2^n}{a^n}(\alpha-\beta)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\frac{3^n}{a^n}(-\alpha+2\beta)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\tag{2}$$

Eftersom gränsvärdet skall vara ändligt och nollskilt följer det ur (2) att om $a = 3$ och $-\alpha + 2\beta \neq 0 \iff \alpha \neq 2\beta$ så fås

$$\frac{1}{3^n} A_{\underline{\mathbf{e}}}^n \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{2^n}{3^n}(\alpha - \beta)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3^n}{3^n}(-\alpha + 2\beta)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{2^n}{3^n}(\alpha - \beta)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-\alpha + 2\beta)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to (-\alpha + 2\beta)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

då $n \to \infty$. Om $\alpha = 2\beta$ så blir resultatet i (3) nollmatrisen och vi ser i (2) att termen innehållande 3^n försvinner. Följaktligen, om $\alpha = 2\beta$ så måste $a = 2$ för att vi skall få ett ändligt och nollskilt gränsvärde. Detta ger

$$\frac{1}{2^n} A_{\underline{\mathbf{e}}}^n \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{2^n}{2^n}(2\beta - \beta)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3^n}{2^n}(-2\beta + 2\beta)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

för varje värde på n så därmed blir ju också gränsvärdet $\beta\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vi sammanfattar:

(a) Om $\alpha \neq 2\beta$ så måste $a = 3$ för att gränsvärdet skall existera ändligt och nollskilt. Gränsvärdet blir $(-\alpha + 2\beta)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Om $\alpha = 2\beta$ så måste $a = 2$ för att gränsvärdet skall existera ändligt och nollskilt. Gränsvärdet blir då $\beta\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.