Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ulf Janfalk

**Kurskod: TATA31**
**Provkod: TEN1**

# Tentamen i Linjär algebra (TATA31/TEN1) 2017–04–18, 8–13.

**Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.**
För godkänt räcker 9 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ($\geq$ 11p) ht2016 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas) och 16p eller mer ger 4 poäng på uppgift 1. Markera detta genom att skriva ”G” respektive ”G+1” i rutan för uppgift 1.
**Fullständiga motiveringar krävs.** Lösningar läggs ut efter skrivtidens slut på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Resultat meddelas via e-post inom 10 arbetsdagar.
**Alla koordinater för vektorer och punkter är, om ej annat anges, givna med avseende på ett positivt orienterat ON-system, $\mathbb{R}^n$ är ett euklidiskt rum med standardskalärprodukten och standardbasen ett positivt orienterat ON-system.**

1. Betrakta punkten $P = (2, 3, 2)$ och linjen

$$L\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

i rummet (ON-system).

(1 p) (a) Bestäm det plan som innehåller $L$ och $P$.

(1 p) (b) Bestäm det plan som innehåller $P$ och är ortogonalt mot $L$.

(1 p) (c) Bestäm avståndet mellan $P$ och $L$.

(3 p) 2. Bestäm den allmänna lösningen till nedanstående system av differentialekvationer,

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 6x_2 + 16x_3 \\ x_2' = 3x_1 - 4x_2 + 18x_3 \\ x_3' = 3x_3 \end{cases}.$$

Bestäm sedan den lösning för vilken gäller

$$x_1(0) = 8, \quad x_2(0) = 12, \quad x_3(0) = 3.$$

(3 p) 3. Låt $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ vara standardbasen i $\mathbb{R}^3$ och $F, G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linjära avbildningar där

$F(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$:s ortogonalprojektion i planet $\Pi\colon\ x - y + z = 0$ och
$G(\mathbf{u}) =$ sträckning av $\mathbf{u}$:s $\mathbf{e}_2$-komponent med en faktor 3.

Bestäm matrisen i standardbasen till den sammansatta avbildningen $F \circ G$.
Är $F \circ G = G \circ F$?

**VÄND!**

(3 p) 4. Låt

$$\mathbb{U} = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \colon \begin{array}{rl} x_1 - x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} - x_5 &= 0 \\ x_1 \phantom{{}-x_2} - x_3 + x_4 \phantom{{}-x_5} &= 0 \end{array} \right\}.$$

Ange en ON-bas i $\mathbb{U}$ och bestäm därefter avståndet från $\mathbf{v} = (1,1,1,1,1)$ till $\mathbb{U}$:s *ortogonala komplement*, $\mathbb{U}^\perp$.

5. Låt $\underline{\mathbf{x}}_3 = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{pmatrix}$ vara standardbasen i $\mathbb{P}_3$, $\underline{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix}$ standardbasen i $\mathbb{P}_2$ och $F\colon \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2$ en linjär avbildning som i baserna ovan har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -2 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(2 p) (a) Bestäm baser i noll- och värderum samt ange deras respektive dimension.

(1 p) (b) Visa att $\mathbf{q} = 1 + 2x + 3x^2 \in V(F)$ och ange *alla* $\mathbf{p} \in \mathbb{P}_3$ sådana att $F(\mathbf{p}) = \mathbf{q}$.

*I dina svar skall de efterfrågade polynom skrivas ut som polynom, ej i matrisform.*

(3 p) 6. Visa att ekvationerna

$$Q_1(x,y) = 4x^2 - 24xy + 11y^2 = 5 \quad \text{och} \quad Q_2(x,y) = 4x^2 - 24xy + 11y^2 = -5$$

definierar varsin hyperbel. Vilken av hyperblerna är närmast origo? Rita, ***på separat papper***, båda hyperblerna i samma koordinatsystem. Av din figur skall tydligt framgå symmetriaxlarnas riktning, vilka punkter som är närmast origo för respektive hyperbel samt koordinaterna för dessa.

(3 p) 7. Låt $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ vara tre *olika* reella tal. Visa att det för varje polynom $\mathbf{p} \in \mathbb{P}_2$ finns reella tal $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sådana att

$$\frac{\mathbf{p}(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)} = \frac{\lambda_1}{x-\alpha_1} + \frac{\lambda_2}{x-\alpha_2} + \frac{\lambda_3}{x-\alpha_3}$$

för alla $x \neq \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

## Lösningsförslag till TATA31, Linjär algebra, 2017–04–18

1. (a) Låt $P_0 = (1, 2, 3)$ och bestäm vektorn

$$\overline{P_0P} = \overline{OP} - \overline{OP_0} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Låt $\mathbf{v}$ vara $L$:s riktningsvektor och $\mathbf{n}_{(\mathrm{a})}$ det sökta planets normal. Då gäller

$$\mathbf{n}_{(\mathrm{a})} \parallel \overline{P_0P} \times \mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \Pi_{(\mathrm{a})}: \; -x + 5y + 4z = D$$
$$\begin{matrix} 1 & \quad & 3 \\ 1 & \quad & -1 \end{matrix}$$

$$P \in \Pi_{(\mathrm{a})} \Longrightarrow -2 + 5{\cdot}3 + 4{\cdot}2 = 21, \quad \text{d v s} \quad \Pi_{(\mathrm{a})}: \; -x + 5y + 4z = 21.$$

(b) Då $L$ är ortogonal mot det sökta planet $\Pi_{(\mathrm{b})}$ följer det att vi kan välja $\mathbf{n}_{(\mathrm{a})} = \mathbf{v}$ så att

$$\Pi_{(\mathrm{b})}: \; 3x - y + 2z = D$$
$$P \in \Pi_{(\mathrm{b})} \Longrightarrow 3{\cdot}2 - 3 + 2{\cdot}2 = 7, \quad \text{d v s} \quad \Pi_{(\mathrm{b})}: \; 3x - y + 2z = 7.$$

(c) För att beräkna avståndet beräknar vi först

$$\overline{P_0P}_{\parallel \mathbf{v}} = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2}\left(\overline{P_0P} \bullet \mathbf{v}\right)\mathbf{v} = \frac{1}{14}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)\mathbf{v} = 0{\cdot}\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

d v s $\overline{P_0P} \perp \mathbf{v}$ och följaktligen blir det sökta avståndet

$$\left|\overline{P_0P}\right| = \left|\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3}.$$

2. Skriv systemet på matrisform och bestäm koefficientmatrisens egenvärden och egenvektorer.

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 6x_2 + 16x_3 \\ x_2' = 3x_1 - 4x_2 + 18x_3 \\ x_3' = \qquad\qquad\qquad 3x_3 \end{cases} \iff X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 16 \\ 3 & -4 & 18 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = AX$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & 16 \\ 3 & -4-\lambda & 18 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{utveckla} \\ \text{efter rad 3} \end{bmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (3-\lambda)((\lambda-5)(\lambda+4)+18) = (3-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2) =$$
$$= (3-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1) = 0 \iff \lambda = -1, 2, 3$$

$$\underline{\underline{\lambda = -1}}: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -6 & 16 & 0 \\ 3 & -3 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_1 - 2r_2 \\ r_1 \leftrightarrow r_2/3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{-1} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 2}}: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & 16 & 0 \\ 3 & -6 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{r_2 - r_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_2 = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 3}}: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 16 & 0 \\ 3 & -7 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{(2r_2-3r_1)/4}{\underset{}{\overset{r_1/2}{\sim}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Därmed har systemet den allmänna lösningen

$$X(t) = C_{-1}e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Insättning av $t = 0$ ger

$$X(0) = C_{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{-1} \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \overset{r_2-r_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \overset{r_1+2r_2}{\underset{}{\overset{-r_2}{\sim}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 16 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} C_{-1} \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 - 5\cdot 3 = 1 \\ -4 + 2\cdot 3 = 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

d v s lösningen med de sökta begynnelsevärdena är

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Bestäm först $F$:s matris $A$ och $G$:s matris $B$ var för sig genom att bestämma vad $F$ respektive $G$ gör med $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Ur ekvationen för $\Pi$ fås att vi kan välja $\mathbf{n} = (1, -1, 1)$ som planets normal. Vi får

$$F(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_{1_{\|\mathbf{n}}} = \mathbf{e}_1 - \frac{(\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n} = \mathbf{e}_1 - \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$F(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_{2_{\|\mathbf{n}}} = \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$F(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_{3_{\|\mathbf{n}}} = \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

För $G$:s del blir kalkylen snudd på trivial,

$$G(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1, \quad G(\mathbf{e}_2) = 3\mathbf{e}_2, \quad G(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3 \iff B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrisen för $F \circ G$ är

$$AB = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

och för $G \circ F$ är den

$$BA = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Då $AB \neq BA$ är $F \circ G \neq G \circ F$.

4. Löser man det definierande ekvationssystemet får man en tre-parametrig lösningsmängd, d v s $\dim \mathbb{U} = 3$. Med den så erhållna lösningsmängden kan vi starta Gram-Schmidt processen. För att korta ner räknandet kan man istället själv välja $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{U}$ sådana att $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$ och sedan en tredje vektor $\mathbf{u}_3 \in \mathbb{U}$ som då är den enda som behöver ortogonaliseras. T ex kan man välja

$$\mathbf{u}_1 = (1,1,1,0,1), \quad \mathbf{u}_2 = (-1,0,1,2,0), \quad \mathbf{u}_3 = (1,1,0,-1,0).$$

Sätt $\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_1$ $\mathbf{f}_2 = \widehat{\mathbf{u}}_2$ och ortogonalisera $\mathbf{u}_3$. Vi får

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_{3_{\|\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2}} = (\mathbf{u}_3 \bullet \mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 + (\mathbf{u}_3 \bullet \mathbf{f}_2)\,\mathbf{f}_2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{u}_{3_{\perp\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2}} = \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_{3_{\|\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{och vi väljer} \quad \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom

$$\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}^\perp} = \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}$$

ger Sats 6.3.15, sid 150 $\quad \min_{\mathbf{u}\in\mathbb{U}^\perp} |\mathbf{v}-\mathbf{u}| = \left|\mathbf{v}-\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}^\perp}\right| = \left|\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}^\perp}\right| = \left|\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}\right|$. Vi får

$$\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = (\mathbf{v}\bullet\mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 + (\mathbf{v}\bullet\mathbf{f}_2)\,\mathbf{f}_2 + \underbrace{(\mathbf{v}\bullet\mathbf{f}_3)}_{=0}\mathbf{f}_3 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{6}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\\0\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\\0\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\3\\3\\0\\3\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\3\\4\\2\\3\end{pmatrix} \Longrightarrow \min_{\mathbf{u}\in\mathbb{U}^\perp}|\mathbf{v}-\mathbf{u}| = \left|\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}\right| = \frac{1}{3}\sqrt{42}.$$

5. Enligt Sats 7.5.4, sid 181 är värderummet höljet av avbildningsmatrisens kolonnvektorer. Vi studerar nu nollrumsekvationen, $AX = 0$ tillika beroendeekvation för nyss nämnda kolonnvektorer, samt ekvationen "linjärkombination av kolonnvektorerna = godtyckligt polynom $a_0 + a_1x + a_2x^2$. Då fås följande system

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & -1 & 4 & 0 & a_0 \\ 2 & 2 & -2 & 8 & 0 & a_1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 0 & a_2 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-2r_1\\ r_3-3r_1\\ r_2\leftrightarrow -r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & -1 & 4 & 0 & a_0 \\ 0 & 2 & -4 & 9 & 0 & 3a_0-a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2a_0+a_1 \end{array}\right). \qquad (1)$$

(a) Vi börjar med nollrummet, d v s vilka polynom $b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$ är sådana att $F(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3) = 0$-polynomet? Löser vi ekvationssystemet (1) ovan fås

$$\begin{pmatrix}b_0\\b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-b_1+b_2-4b_3 = -s+t\\ (4b_2-9b_3)/2 = 2s-9t\\ s\\ 2t\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-9\\0\\2\end{pmatrix}, \quad s,t\in\mathbb{R} \Longrightarrow \qquad (2)$$

$$\Longrightarrow N(F) = [-1+2x+x^2, 1-9x+2x^3]$$

så att $-1+2x+x^2, 1-9x+2x^3$ är en bas i $N(F)$ och därmed $\dim N(F) = 2$. Ser vi nu (1) som beroendeekvationen för kolonnvektorerna, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$ så ger lösningen (2) att

$$\underline{\underline{s=1, t=0}}: \quad \mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_1 - 2\mathbf{p}_2 \qquad \underline{\underline{s=0, t=1}}: \quad \mathbf{p}_4 = (-\mathbf{p}_1 + 9\mathbf{p}_2)/2,$$

d v s $\dim(VF) = 2$. Om vi sedan betraktar den tredje tolkningen av (1) får vi att ett polynom är en linjärkombination av kolonnvektorerna omm $\quad -2a_0 + a_1 = 0$, dvs

$$V(F) = \left[\underline{\mathbf{x}}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{x}}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = [1 + 2x + 3x^2, 1 + 2x + x^2] =$$
$$= \left\{a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{P}_2 \colon\ -2a_0 + a_1 = 0\right\}.$$

Följaktligen är $1 + 2x + 3x^2, 1 + 2x + x^2$ en bas i $V(F)$ och $\dim V(F) = 2$.

(b) Vi noterar att $\mathbf{q}$ =första kolonnvektorn i $A$. Eftersom första kolonnvektorn = $F$(första basvektorn) följer det att

$$F(1) = F\left(\underline{\mathbf{x}}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \underline{\mathbf{x}}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 + 2x + 3x^2.$$

Sats 3.4.9, sid 72 ger då att

$$F(\mathbf{p}) = \mathbf{q} \iff \mathbf{p} = \mathbf{p}_p + \mathbf{p}_h$$

där *partikulärlösningen* $\mathbf{p}_p$ är *en* lösning till $F(\mathbf{p}) = \mathbf{q}$ och *homogenlösningen* $\mathbf{p}_h$ är en lösning till $F(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$, dvs $\mathbf{p}_h \in N(F)$. Följaktligen, samtliga lösningar $\mathbf{p}$ till ekvationen $F(\mathbf{p}) = \mathbf{q}$ ges av

$$\mathbf{p} = \underline{\mathbf{x}}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\underline{\mathbf{x}}_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\underline{\mathbf{x}}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} =$$
$$= 1 + s(-1 + 2x + x^2) + t(1 - 9x + 2x^3), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Man får naturligtvis samma svar om man ställer upp och löser ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 8 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

på vanligt sätt.

6. Skriv ekvationerna på matrisform och beräkna egenvärden och egenvektorer. Vi får

$$Q_{1,2} = 4x^2 - 24xy + 11y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ -12 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \pm 5$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -12 \\ -12 & 11-\lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(11 - \lambda) - 144 = \lambda^2 - 15\lambda + 100 =$$
$$= (\lambda - 20)(\lambda + 5) \iff \lambda = 20, -5$$

$$\underline{\underline{\lambda = 20}}: \quad \begin{pmatrix} -16 & -12 \\ -12 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow X_{20} = t \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\lambda = -5}}: \quad \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow X_{-5} = t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}\,T = \underline{\mathbf{e}}\,\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow Q\left(\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = 20y_1^2 - 5y_2^2 = \pm 5 \iff$$
$$\iff 4y_1^2 - y_2^2 = \pm 1$$

Eftersom egenvärdena har olika tecken visar kalkylerna ovan att kurvorna är hyperbler. Om man utgår från grundutseendet för en hyperbel så inses att de punkter på hyperbeln som är närmast origo, har en av koordinaterna =0. Vi börjar med $Q_1 = 4y_1^2 - y_2^2 = 1$. Eftersom $y_1 = 0$ är omöjligt i ekvationen följer det att de punkter som ligger närmast, $P_{1\pm}$ (för det är ju två) har ortsvektorerna

$$\overline{OP}_{1\pm} = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} \pm 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{2}\mathbf{f}_1 = \pm\frac{1}{10}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

och avståndet blir följaktligen $|\mathbf{u}_1| = \left|\pm\frac{1}{2}\mathbf{f}_1\right| = \frac{1}{2}\,|\mathbf{f}_1| = \frac{1}{2}.$

Motsvarande analys för $Q_2 = 4y_1^2 - y_2^2 = -1$ ger

$$\overline{OP}_{2\pm} = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} = \pm\,\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \pm\mathbf{f}_2 = \pm\frac{1}{5}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

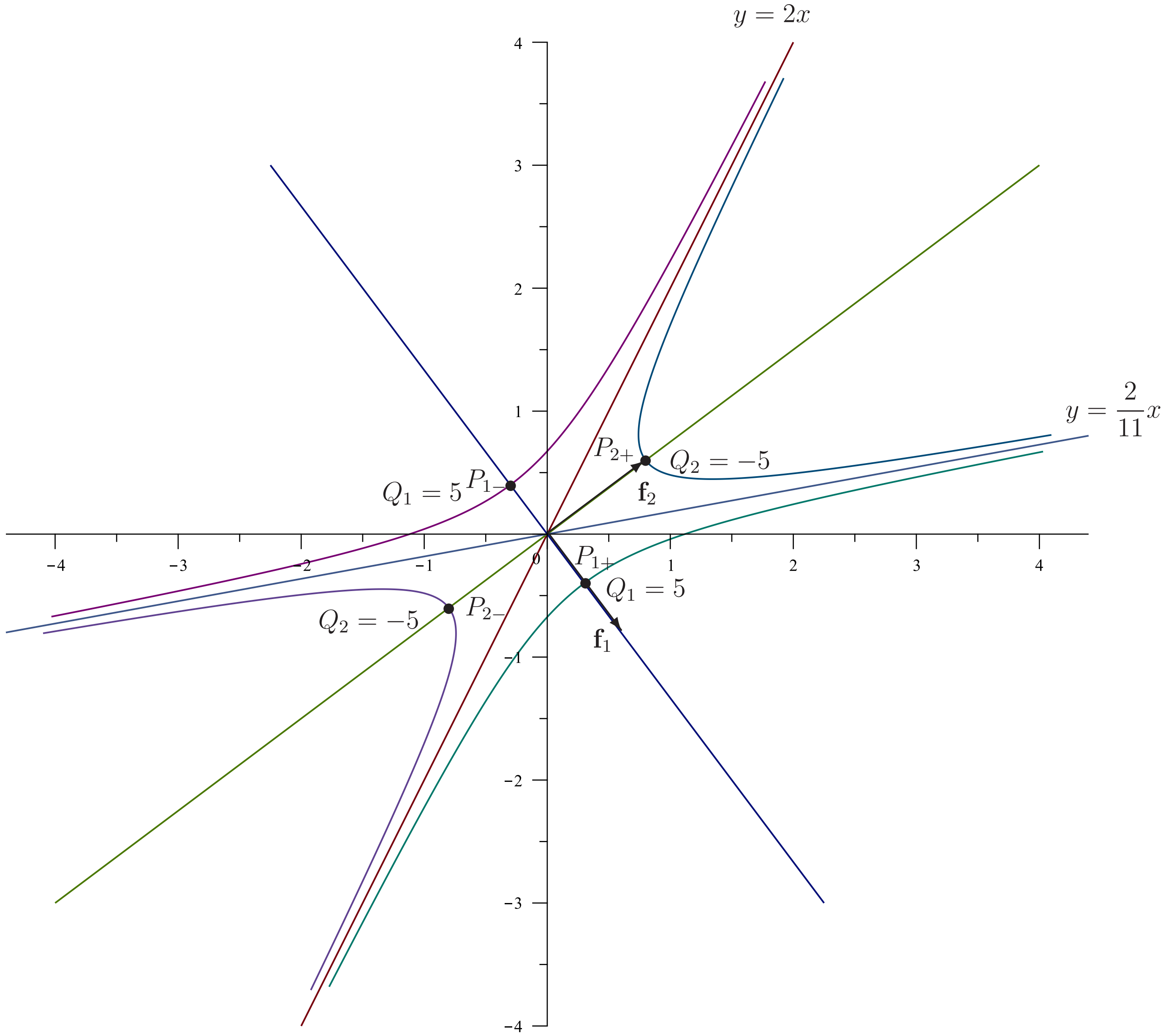
och avståndet $\left|\overline{OP}_{2\pm}\right| = |\mathbf{f}_1| = 1$ vilket ger att kurvan $Q_1(x, y) = 4x^2 - 24xy + 11y^2 = 5$ ligger närmast origo.

Det krävs inte för full poäng, men skadar inte att veta hur man räknar ut asymptoterna eftersom det underlättar kurvritandet avsevärt. Asymptoterna fås genom att studera

$$Q = 4y_1^2 - y_2^2 = 0 \iff 2y_1 - y_2 = 0 \quad \text{eller} \quad 2y_1 + y_2 = 0$$

$$2y_1 - y_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}(2x - 11y) = 0 \iff y = \frac{2}{11}x$$

$$2y_1 + y_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x - y = 0 \iff y = 2x$$



$y = 2x$
$y = \frac{2}{11}x$
$P_{2+}$
$Q_2 = -5$
$\mathbf{f}_2$
$Q_1 = 5$
$P_{1-}$
$P_{1+}$
$Q_1 = 5$
$\mathbf{f}_1$
$P_{2-}$
$Q_2 = -5$

7. Börja med att sätta högerledet på gemensamt bråk. Då fås

$$\frac{\lambda_1(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)+\lambda_2(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)+\lambda_3(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)}.$$

Uppgiften består därmed i att bevisa att

$$\mathbb{P}_2 = [(x-\alpha_2)(x-\alpha_3),(x-\alpha_1)(x-\alpha_3),(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)].$$

Eftersom $\dim \mathbb{P}_2 = 3$ har vi "Rätt antal element" och enligt Satsen om rätt antal element (Sats 5.4.19, sid 121) räcker det att visa att dessa är linjärt oberoende. Ställer vi upp beroendeekvationen fås

$$\lambda_1(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)+\lambda_2(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)+\lambda_3(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) = \mathbf{0}, \tag{3}$$

d v s ekvationen skall vara uppfylld för alla $x \in \mathbb{R}$. Insättning av $x = \alpha_1$, $x = \alpha_2$, $x = \alpha_3$ ger då eftersom $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ är tre *olika* reella tal,

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{x=\alpha_1}}: \quad & \lambda_1(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)+\lambda_2(\alpha_1-\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_3)+\lambda_3(\alpha_1-\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_2) = \\
& = \lambda_1(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3) = 0 \iff \underline{\underline{\lambda_1 = 0}} \\
\underline{\underline{x=\alpha_2}}: \quad & \lambda_1(\alpha_2-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)+\lambda_2(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)+\lambda_3(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_2) = \\
& = \lambda_2(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3) = 0 \iff \underline{\underline{\lambda_2 = 0}} \\
\underline{\underline{x=\alpha_3}}: \quad & \lambda_1(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_3)+\lambda_2(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_3)+\lambda_3(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2) = \\
& = \lambda_3(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3) = 0 \iff \underline{\underline{\lambda_3 = 0}},
\end{aligned}$$

d v s

$$(x-\alpha_2)(x-\alpha_3),(x-\alpha_1)(x-\alpha_3),(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$$

är linjärt oberoende och därmed är

$$[(x-\alpha_2)(x-\alpha_3),(x-\alpha_1)(x-\alpha_3),(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)] = \mathbb{P}_2.$$

Man kan förstås också förenkla beroendeekvationen (3) och skriva den som ekvationssytem på vanligt sätt. Då fås

$$\begin{aligned}
&\alpha_2\alpha_3\lambda_1+\alpha_1\alpha_3\lambda_2+\alpha_1\alpha_2\lambda_3+((-\alpha_2-\alpha_3)\lambda_1+(-\alpha_1-\alpha_3)\lambda_2+(-\alpha_1-\alpha_2)\lambda_3)x+\\
&\qquad+(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)x^2=\\
&\qquad=\begin{pmatrix}1 & x & x^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_2\alpha_3\lambda_1+\alpha_1\alpha_3\lambda_2+\alpha_1\alpha_2\lambda_3\\(-\alpha_2-\alpha_3)\lambda_1+(-\alpha_1-\alpha_3)\lambda_2+(-\alpha_1-\alpha_2)\lambda_3\\\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\end{pmatrix}\\
&\qquad=\begin{pmatrix}1 & x & x^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_2\alpha_3 & \alpha_1\alpha_3 & \alpha_1\alpha_2\\-\alpha_2-\alpha_3 & -\alpha_1-\alpha_3 & -\alpha_1-\alpha_2\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\mathit{0}\\
&\qquad\begin{vmatrix}\alpha_2\alpha_3 & \alpha_1\alpha_3 & \alpha_1\alpha_2\\-\alpha_2-\alpha_3 & -\alpha_1-\alpha_3 & -\alpha_1-\alpha_2\\1 & 1 & 1\end{vmatrix}\overset{\substack{k_2-k_1\\k_3-k_1}}{=}\\
&\qquad=\begin{vmatrix}\alpha_2\alpha_3 & \alpha_3(\alpha_1-\alpha_2) & \alpha_2(\alpha_1-\alpha_3)\\-\alpha_2-\alpha_3 & \alpha_2-\alpha_1 & \alpha_3-\alpha_1\\1 & 0 & 0\end{vmatrix}=\\
&\qquad=(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\begin{vmatrix}\alpha_3 & \alpha_2\\-1 & -1\end{vmatrix}=(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_3)\neq 0
\end{aligned}$$

eftersom $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ är *olika* reella tal. Följaktligen är beroendeekvationen entydigt lösbar, d v s de genererande polynomen är linjärt oberoende.