Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ulf Janfalk

Kurskod: TATA31
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA31/TEN1) 2017–01–09, 14–19.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.
För godkänt räcker 9 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ($\geq$ 11p) ht2016 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas) och 16p eller mer ger 4 poäng på uppgift 1. Markera detta genom att skriva ”G” respektive ”G+1” i rutan för uppgift 1.
Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar läggs ut efter skrivtidens slut på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Resultat meddelas via e-post inom 10 arbetsdagar.
Alla koordinater för vektorer och punkter är, om ej annat anges, givna med avseende på ett positivt orienterat ON-system, $\mathbb{R}^n$ är ett euklidiskt rum med standardskalärprodukten och standardbasen ett positivt orienterat ON-system.

(1 p) 1. (a) Avgör om linjerna

$$L_1 : \ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$
$$L_2 : \ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

skär varann. Om så är fallet, bestäm skärningspunkten.

(1 p) (b) Bestäm (den spetsiga) vinkeln mellan linjerna i (a)

(1 p) (c) Ange skärningslinjen, på parameterform, mellan planen $3x - 2y + z = 3$ och $x - y + 2z = 2$.

(3 p) 2. Låt $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning sådan att $F(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$:s ortogonalprojektion i planet $x - 2y = 0$. Ange F:s egenvärden med tillhörande *egenrum* samt F:s matris i standardbasen och i en bas av egenvektorer.

(3 p) 3. För vilka värden på $a, b \in \mathbb{R}$ ***saknar*** ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = b \\ 2x + y + az = 1 \\ ax + y + 2z = 1 \end{cases}$$

lösningar? För dessa värden på a och b, bestäm minstakvadratlösningarna till det olösbara ekvationssystemet.

VÄND!

(3 p) 4. Betrakta den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ som i standardbaserna för $\mathbb{R}^5$ respektive $\mathbb{R}^3$ har avbildningsmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & 3 & 0 & 2 \\ a & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

där $a \in \mathbb{R}$. Bestäm a så att $\mathbf{v} = (2, -3, 1, 1, 1) \in N(F)$. Bestäm därefter en ON-bas i $N(F)$ och dimensionen av $V(F)$.

(3 p) 5. Visa att $Q(\mathbf{u}) = 5x^2 + 4xy + 8y^2 = 180$ definierar en ellips. Rita kurvan noggrant på separat blad. **Skala**: minst 2 rutor per längdenhet. Av din figur skall framgå symmetriaxlarnas riktning, ellipsens halvaxellängder (exakta värdena skall vara angivna i figuren) samt koordinaterna för symmetriaxlarnas skärningspunkter med ellipsen.

(2 p) 6. (a) Betrakta underrummet

$$\mathbb{U} = \left\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{P}_3 \colon \begin{array}{l} a_0 + a_1 - a_2 - a_3 = 0 \\ a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 2a_3 = 0 \end{array} \right\}.$$

Bestäm en bas i $\mathbb{U}$ och fyll ut denna till en bas i $\mathbb{P}_3$. I ditt svar skall basvektorerna skrivas som de polynom de är, inte på bas·koordinat-form!

(1 p) (b) Bestäm koordinatmatrisen för $\mathbf{q} = 1 - x + x^2 - x^3$ i den bas du valde i (a).

(3 p) 7. Låt $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som utför en vridning $\pi/2$ moturs kring $\mathbf{e}_1$ sett från spetsen av $\mathbf{e}_1$. Låt $G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara samma avbildning fast med $\mathbf{e}_3$ som vridningsaxel. Ge en fullständig beskrivning av den sammansatta avbildningen $F \circ G$.

Lösningsförslag till TATA31, Linjär algebra, 2017–01–09

1. (a) Eventuell skärningspunkt fås genom att lösa

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}+t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}+s\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\iff$$

$$\iff s\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\iff$$

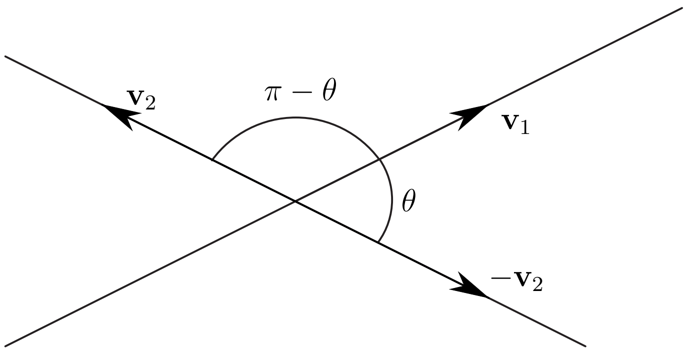
$$\iff\left(\begin{array}{cc|c}1&2&1\\-1&-1&1\\0&1&2\end{array}\right)\overset{r_2+r_1}{\sim}\left(\begin{array}{cc|c}1&2&1\\0&1&2\\0&1&2\end{array}\right)\overset{r_3-r_2}{\sim}\left(\begin{array}{cc|c}1&2&1\\0&1&2\\0&0&0\end{array}\right)\Longrightarrow\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}.$$

Insättning ger skärnigspunkten $(7,0,0)$.

(b) För att beräkna vinkeln beräknar vi skalärprodukten mellan linjernas riktningsvektorer. Låt $\mathbf{v}_1=(2,-1,1)$ och $\mathbf{v}_2=(-1,1,0)$.

$$\mathbf{v}_1\bullet\mathbf{v}_2=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=-3$$

Då den spetsiga vinkeln efterfrågas måste skalärprodukten vara positiv. Följaktligen beräknar vi istället (se figur)



$$\mathbf{v}_1\bullet(-\mathbf{v}_2)=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=3=\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}\cos\theta=2\sqrt{3}\cos\theta\iff$$

$$\iff\cos\theta=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Longrightarrow\theta=\frac{\pi}{6}$$

(c) Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases}x-\ \ y+2z=2\\3x-2y+\ \ z=3\end{cases}\overset{ekv_2-3ekv1}{\iff}\begin{cases}x-y+2z=\ \ 2\\\qquad y-5z=-3\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}x=2+y-2z=2-3+5t-2t=-1+3t\\y=-3+5z=-3+5t\\z=t\end{cases},\quad t\in\mathbb{R}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow L\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\end{pmatrix}+t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}.$$

2. Låt $\mathbf{n} = (1,-2,0)$ = planets normal och beteckna med $\mathbf{v}$ en godtycklig vektor i planet. För en ortogonalprojektion gäller

$$F(\mathbf{n}) = \mathbf{0} \qquad \text{och} \qquad F(\mathbf{v}) = \mathbf{v}.$$

Följaktligen är $\mathbf{n}$ en egenvektor med egenvärde 0 och $[\mathbf{n}]$ är egenrummet. Vidare, varje vektor i planet är en egenvektor med egenvärde 1 så egenrummet till 1 är planet självt. Med $\mathbf{f}_1 = \hat{\mathbf{n}}$ och $\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ en ON-bas för planet har vi en ON-bas för hela $\mathbb{R}^3$. Vi kan, t ex välja

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_3, \text{ d v s } \underline{\mathbf{f}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Detta ger att F:s matris i en bas av egenvektorer blir

$$A_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom standardbasen och egenbasen båda är ON-baser följer det att T är ortonormal, d v s $T^{-1} = T^t$. Basbytesformeln ger sedan

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = TA_{\underline{\mathbf{f}}}T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}T\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. Vi skriver systemet på matrisform och använder determinantkriteriet (Sats 4.7.2, sid 93). Då fås

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = b \\ 2x + \ \ y + az = 1 \\ ax + \ \ y + 2z = 1 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & a \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{Y}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & a \\ a & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_1-2r_2 \\ r_3-r_2}}{=} \begin{vmatrix} -3 & 0 & 3-2a \\ 2 & 1 & a \\ a-2 & 0 & 2-a \end{vmatrix} = (a-2)\begin{vmatrix} -3 & 3-2a \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$=(a-2)(3-(3-2a)) = 2a(a-2) = 0 \iff a = 0, 2,$$

d v s systemet har entydig lösning för alla $b \in \mathbb{R}$ om $a \neq 0$ eller 2. $a = 0$ eller 2 kontrolleras separat.

$$\underline{\underline{a=2}}: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b \\ 0 & -3 & -4 & 1-2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ som är lösbart för alla } b \in \mathbb{R}.$$

$$\underline{\underline{a=0}}:\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&b\\2&1&0&1\\0&1&2&1\end{array}\right)\overset{r_2-2r_1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&b\\0&-3&-6&1-2b\\0&1&2&1\end{array}\right)\overset{\substack{r_2+3r_3\\r_3\leftrightarrow r_2}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&b\\0&1&2&1\\0&0&0&4-2b\end{array}\right)$$

som saknar lösning om $b\neq 2$.
Återstår att bestämma minsta-kvadratlösningarna till $AX=Y$ för $a=0$ och $b\neq 2$.

$$A^tA=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&1\\3&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&4&3\\4&6&8\\3&8&13\end{pmatrix}$$

$$A^tY=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&1\\3&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b+2\\2b+2\\3b+2\end{pmatrix}.$$

Lös sedan normalekvationerna på vanligt sätt

$$\left(\begin{array}{ccc|c}5&4&3&b+2\\4&6&8&2b+2\\3&8&13&3b+2\end{array}\right)\overset{\substack{3r_1\\3r_2\\r_1\leftrightarrow r_3}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}3&8&13&3b+2\\12&18&24&6b+6\\15&12&9&3b+6\end{array}\right)\overset{\substack{r_2-4r_1\\r_3-5r_1}}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}3&8&13&3b+2\\0&-14&-28&-6b-2\\0&-28&-56&-12b-4\end{array}\right)\overset{\substack{r_3-2r_2\\7r_1\\-r_2/2}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}21&56&91&21b+14\\0&7&14&3b+1\\0&0&0&0\end{array}\right)\overset{\substack{r_1-8r_2\\r_1/3}}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}7&0&-7&-b+2\\0&7&14&3b+1\\0&0&0&0\end{array}\right)\Longrightarrow X_0=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-b+2\\3b+1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}.$$

4. Vi börjar med att beräkna a

$$F(2,-3,1,1,1)=F\left(\underline{\mathbf{e}}_5\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix}-1&a&3&0&2\\a&2&0&3&1\\1&0&-2&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\1\\1\end{pmatrix}=$$

$$=\underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix}3-3a\\2a-2\\0\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff a=1.$$

Beräkna sedan $N(F)$ på vanligt sätt genom att lösa $AX=0$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}-1&1&3&0&2&0\\1&2&0&3&1&0\\1&0&-2&1&-1&0\end{array}\right)\overset{\substack{r_2+r_1\\r_3+r_1}}{\sim}\left(\begin{array}{ccccc|c}-1&1&3&0&2&0\\0&3&3&3&3&0\\0&1&1&1&1&0\end{array}\right)\overset{\substack{r_2-3r_3\\r_3\leftrightarrow r_2\\-r_1}}{\sim}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&-1&-3&0&-2&0\\0&1&1&1&1&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\sim$$

$$\overset{r_1+r_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&-2&1&-1&0\\0&1&1&1&1&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow N(F) \ni \mathbf{u} = r\,\underline{\mathbf{e}}\underbrace{\begin{pmatrix} 2\\ -1\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_1} + s\,\underline{\mathbf{e}}\underbrace{\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\\ -1\\ 0\end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_2} + t\,\underline{\mathbf{e}}\underbrace{\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_3}, \quad r, s, t \in \mathbb{R}$$

och följaktligen är $N(F) = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$ vilket ger $\dim N(F) = 3$. Dimensionssatsen (Sats 7.5.6, sid 182) ger då att

$$\dim V(F) = \dim \mathbb{R}^5 - \dim N(F) = 5 - 3 = 2.$$

Vidare observerar vi att $\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_3$ och väljer därför $\mathbf{f}_1 = \hat{\mathbf{u}}_2$, $\mathbf{f}_2 = \hat{\mathbf{u}}_3$. För att erhålla en ON-bas i $N(F)$ behöver vi bara använda Gram-Schmidtprocessen på $\mathbf{u}_1$. Vi får

$$\mathbf{u}_{1_{\|[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = (\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 + (\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{f}_2)\,\mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}^2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\\ -1\\ 0\end{pmatrix} + \frac{3}{\sqrt{3}^2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\\ -1\\ 0\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3\\ -3\\ 0\\ 0\\ 3\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 4\\ -2\\ 0\\ -1\\ 3\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_{1_{\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{1_{\|[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 6\\ -3\\ 3\\ 0\\ 0\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 4\\ -2\\ 0\\ -1\\ 3\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2\\ -1\\ 3\\ 1\\ -3\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_3 = \widehat{\mathbf{u}_{1_{\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}}} = \frac{1}{\sqrt{24}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2\\ -1\\ 3\\ 1\\ -3\end{pmatrix}.$$

Sammanfattningsvis, $a{=}1$, $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ enligt ovan är en ON-bas i $N(F)$ och $\dim V(F){=}2$.

5. Skriv Q på matrisform och beräkna egenvärden och egenvektorer.

$$Q(\mathbf{u}) = Q\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\right) = 5x^2 + 4xy + 8y^2 = \begin{pmatrix} x & y\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2\\ 2 & 8\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} = 180,$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2\\ 2 & 8-\lambda\end{vmatrix} = (5-\lambda)(8-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 13\lambda + 36 =$$

$$= (\lambda - 9)(\lambda - 4) = 0 \iff \lambda = 4, 9.$$

$$\underline{\underline{\lambda = 4}}: \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right) \Longrightarrow X_4 = t\begin{pmatrix} 2\\ -1\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 9}}: \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_9 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\mathbf{f}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

I ovanstående ON-bas av egenvektorer fås

$$Q(\mathbf{u}) = Q\left(\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = 4y_1^2 + 9y_2^2 = 180 \iff$$

$$\iff \frac{y_1^2}{45} + \frac{y_2^2}{20} = \left(\frac{y_1}{\sqrt{45}}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{\sqrt{20}}\right)^2 = \left(\frac{y_1}{3\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{2\sqrt{5}}\right)^2 = 1.$$

Ur ellipsens ekvation på standardform avläser vi nu att

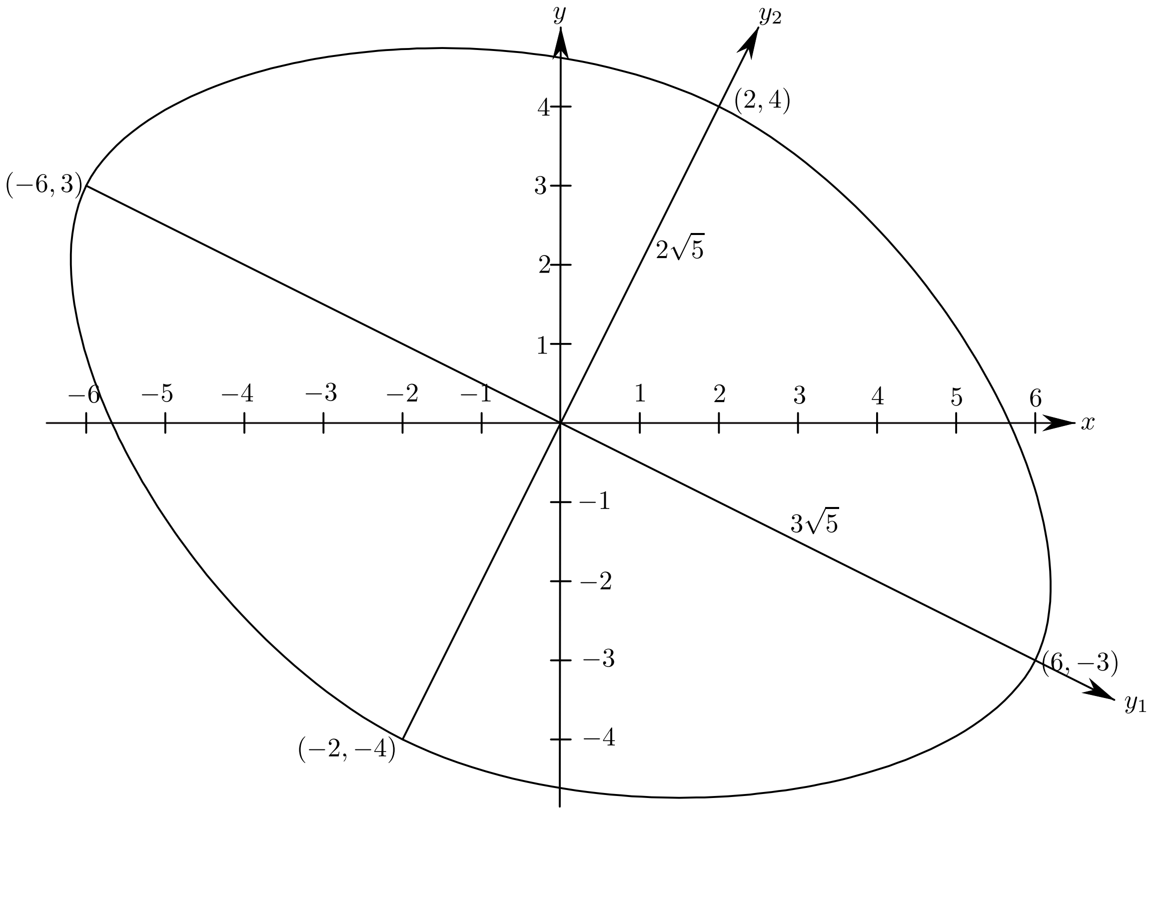
- storaxelns längd är $3\sqrt{5}$ och att storaxeln skär ellipsen i punkterna med ortsvektor

$$\mathbf{u}_S = \pm\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 3\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \pm 3\sqrt{5}\mathbf{f}_1 = \pm 3\sqrt{5}\frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \pm\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix},$$

- lillaxelns längd är $2\sqrt{5}$ och att lillaxeln skär ellipsen i punkterna med ortsvektor

$$\mathbf{u}_L = \pm\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{5} \end{pmatrix} = \pm 2\sqrt{5}\mathbf{f}_2 = \pm 2\sqrt{5}\frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \pm\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Vi får ur detta följande figur (kurvan skall gå genom $(\pm 6, 0)$ men jag är för dålig på ritprogrammet för att få till det).



6. (a) Lös ekvationssystemet för att få en bas i $\mathbb{U}$.

$$\begin{cases} a_0 + \ \ a_1 - \ \ a_2 - \ \ a_3 = 0 \\ a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 2a_3 = 0 \end{cases} \overset{ekv2-ekv1}{\iff} \begin{cases} a_0 + a_1 - \ \ a_2 - \ \ a_3 = 0 \\ \qquad a_1 + 4a_2 + 3a_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\overset{ekv1-ekv2}{\iff} \begin{cases} a_0 \qquad - 5a_2 - 4a_3 = 0 \\ \qquad a_1 + 4a_2 + 3a_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5s+4t \\ -4s-3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad s,t \in \mathbb{R}.$$

Ur detta följer att

$$\mathbf{p}_1 = \underline{\mathbf{x}}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 - 4x + x^2 \quad \text{och} \quad \mathbf{p}_2 = \underline{\mathbf{x}}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 - 3x + x^3$$

är en bas i $\mathbb{U}$. För att välja utfyllnad utnyttjar vi plus-satsen (Sats 5.4.21, sid 123) två gånger. Som första utfyllnadspolynom väljer vi $\mathbf{p}_3 = 2-x$ som bryter mot den 1:a av de ursprungliga ekvationerna men uppfyller den andra och som därmed *inte* tillhör $\mathbb{U}$. Enligt plus-satsen är $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ linjärt oberoende och

$$[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3] = \left\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{P}_3 \colon a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 2a_3 = 0 \right\}.$$

Som sista utfyllnad väljer vi ett polynom som bryter mot den återstående ekvationen, t ex $\mathbf{p}_4 = 1$. Enligt plus-satsen är $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$ linjärt oberoende och eftersom de är "rätt antal" är de en bas i $\mathbb{P}_3$ enligt satsen om rätt antal element (Sats 5.4.19, sid 121).

(b) Insättning av $\mathbf{q}$:s koordinater i ekvationerna för $\mathbb{U}$ ger att $\mathbf{q} \in \mathbb{U}$. Följaktligen gäller att $\mathbf{q}$:s $\mathbf{p}_3$- och $\mathbf{p}_4$-koordinater är 0 och

$$\mathbf{q} = x_1\mathbf{p}_1 + x_2\mathbf{p}_2 \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{\substack{r_1-5r_3,\, r_1-4r_4 \\ r_2+4r_3,\, r_2+3r_4 \\ r_1 \leftrightarrow r_3 \\ r_2 \leftrightarrow r_4}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \mathbf{q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + 0\mathbf{p}_3 + 0\mathbf{p}_4 = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 & \mathbf{p}_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d v s $\mathbf{q}$:s koordinatmatris i basen $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$ är $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

7. Kalla F:s avbildningsmatris A, G:s B och $F \circ G$:s C. Klart att (håll tre pennor som ett ON-system och vrid $\pi/2$ kring $\mathbf{e}_1$ respektive $\mathbf{e}_3$)

$$F(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; F(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; F(\mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_2 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$G(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; G(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; G(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Satsen om avbildningsmatris till sammansatt avbildning (Sats 7.6.2, sid 186) ger

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi observerar att även C är en ortonormal matris och enligt Sats 7.7.2, sid 191 är också $F \circ G$ isometrisk. Enligt sats 7.7.6, sid 195 är $\det A = \det B = 1$ eftersom både F och G är vridningar. Produktlagen för determinanter, Sats 4.8.1, sid 96 ger då $\det C = \det AB = \det A \cdot \det B = 1 \cdot 1 = 1$ så även $F \circ G$ är en vridning.
Bestäm vridningsaxeln till $F \circ G$, dvs lös ekvationen $CX = X \iff (C - I)X = 0$. Vi får

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3+r_1 \\ -r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3+r_2 \\ -r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sätt

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} \underline{\mathbf{e}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 1 \\ -1 \end{array} \times \underline{\mathbf{e}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 1 \\ 1 \end{array} = \frac{1}{\sqrt{6}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} T, \quad T^{-1} = T^t,$$

$$C_{\underline{\mathbf{f}}} = T^{-1} C_{\underline{\mathbf{e}}} T = T^t \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix},$$

d v s $F \circ G$ är en vridning moturs vinkeln $\arccos(-1/2) = 2\pi/3$ sett från toppen av $\mathbf{f}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$.

Alternativ: Istället för att använda basbytesformeln kan vi beräkna vinkel och vridningsriktning enligt följande:

- Tag vektor ortogonal mot vrisningsaxeln, t ex $(1, 1, 0)$. Vridningsvinkeln fås då som vinkeln mellan $(1, 1, 0)$ och $F(1, 1, 0)$.
- Beräkna sedan $(1, 1, 0) \times F(1, 1, 0)$. Denna blir med nödvändighet parallell med vridningsaxeln. Blir riktningen *samma* som vridningsaxeln sker vridnngen moturs sett från toppen av vridningsaxeln. Blir riktningen motsatt sker vridningen medurs.

Vi får

$$F(1, 1, 0) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet F(1, 1, 0) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 = 2\cos\theta \iff \cos\theta = -\frac{1}{2} \implies \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times F(1, 1, 0) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{vridningsaxeln},$$

$$\begin{matrix} 1 & \quad & 1 & -1 \\ 1 & \quad & 1 & 0 \end{matrix}$$

d v s vridningen sker moturs sett från toppen av $(1, -1, 1)$.