LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Ulf Janfalk

Kurskod: TATA31
Provkod: KTR1

Kontrollskrivning i Linjär algebra 2016–10–27, 14–18.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.
På uppgift 1–14 skall ***endast svar*** ges. Varje rätt svar ger 1 poäng, fel svar 0 poäng.
Uppgift 15 och 16 ger tre poäng vardera; ***fullständiga och välmotiverade lösningar krävs.***
Minst 11 poäng tillgodoräknas som tre poäng på uppgift 1 på tentamen.
Minst 16 poäng ger ytterligare en bonuspoäng på tentamen.
Rätten att tillgodoräkna sig bonus består under läsåret 2016-2017.
Resultatet meddelas via e-post. Lösningar läggs ut efter skrivtidens slut på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Om inget annat sägs, är alla koordinater för vektorer i planet och rummet givna relativt en högerorienterad ON-bas.

1. Skriv ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_5 = 1 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_5 = 7 \end{cases}$$

   på matrisform (d v s på formen $(A|Y)$) och ange lösningsmängden i parameterform.

2. Betrakta matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Beräkna den/de av de nedan angivna operationerna som är definierade:

$$A + B, \qquad AB, \qquad BA, \qquad AB^t.$$

3. Rita ett vanligt rätvinkligt koordinatsystem (höger ON) och låt **fem rutor** svara mot **en längdenhet**. Låt $\underline{\mathbf{e}}$ vara en ON-bas där $\mathbf{e}_1$ pekar i den horisontella koordinataxelns riktning och $\mathbf{e}_2$ i den lodräta axelns riktning. Rita i detta koordinatsystem in, så exakt som möjligt, vektorerna $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, den ortogonala projektionen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$ och den ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{u}$.

4. Låt $\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{u}_2 = 2\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$.
   Skriv $\mathbf{v}$ som linjärkombination av $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$.

5. Ange ekvationen på parameterform till den linje L genom punkten $(1, 2, 3)$ som är vinkelrät mot planet $3x - y + 2z = 7$.

VÄND!

6. Ange mittpunktsnormalen N till sträckan mellan punkterna $(-2, 1)$ och $(7, -2)$.

7. Bestäm den punkt i planet Π: $4x + y + 2z = 1$ som ligger närmast punkten $(1, 1, 1)$.

8. Bestäm avståndet mellan punkten $(3, 3)$ och linjen $2x + 3y = 6$.

9. Bestäm ekvationen på normalform till planet som innehåller punkten $(1, 1, 1)$ och linjen

$$L\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

10. Betrakta underrummet $\mathbb{U}$ av $\mathbb{R}^4$ definierat genom

$$\mathbb{U} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4\colon \begin{array}{c} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ \text{och} \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

och låt

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 1, 2, -1), \quad \mathbf{v}_3 = (1, -1, 0, -1), \quad \mathbf{v}_4 = (1, 2, 3, 4).$$

Vilken/vilka av $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4$ tillhör $\mathbb{U}$?

11. Beräkna arean av triangeln med hörn i $(2, 1, -1)$, $(3, -2, 2)$ och $(1, 2, 1)$.

12. Beräkna vinkeln mellan vektorerna $\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ och $2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$. Svaret får innehålla arcusfunktioner.

13. Lös matrisekvationen $\left(A - A^t\right)^{-1} X \left(B^{-1}\right)^t = C$ där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. Beräkna inversen till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

(3 p) 15. Avgör för vilka värden på de reella talen a och b som ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = b \\ -2x + ay - z = a \\ ax + y + 2z = -2 \end{cases}$$

har entydig lösning, ingen lösning eller oändligt många lösningar. Fås oändligt många lösningar för något val av a och b skall lösningsmängden anges.

(3 p) 16. Betrakta underrummet

$$\mathbb{U} = [(1, -1, 1, 0), (2, 1, 1, 3), (0, -1, 1, 1), (1, 1, 0, 1)] \subset \mathbb{R}^4.$$

Beskriv $\mathbb{U}$ med så få vektorer som möjligt. Avgör om vektorerna $\mathbf{v}_1 = (3, 1, 1, 2)$ och $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1, 1)$ tillhör $\mathbb{U}$ eller inte.

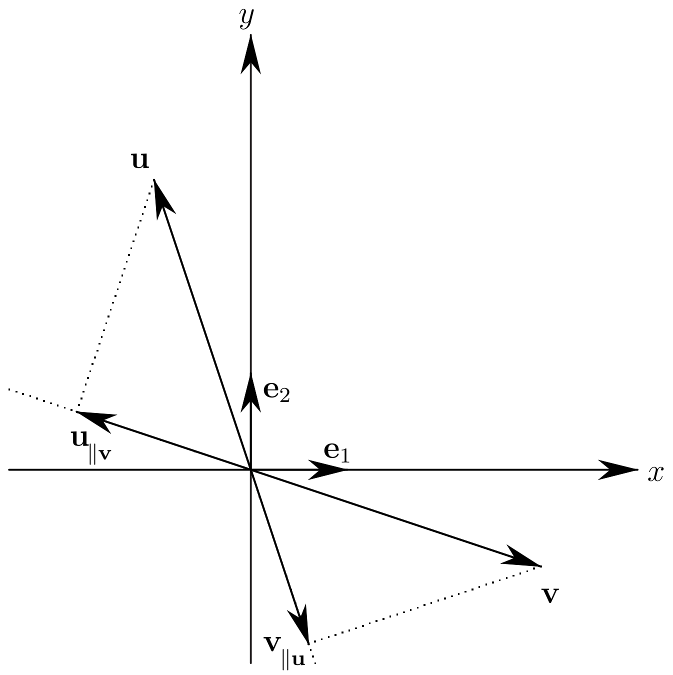
Lösningsförslag till TATA31. Linjär algebra, 2016–10–27

1. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. AB och $A+B$ är inte definierade.

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 8 & -5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix},$$
$$AB^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ -1 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

3.



4. $\mathbf{v} = \frac{16}{3}\mathbf{u}_1 - \frac{5}{3}\mathbf{u}_2 \ \left(= \frac{16}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 16-10 \\ 32-35 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

5. L: $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$

6. N: $3x - y = 8$ (normalform) eller $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ (parameterform)

7. $\left(-\frac{1}{7}, \frac{5}{7}, \frac{3}{7}\right)$

8. $\dfrac{9}{13}\sqrt{13}$

9. $2x + y = 3$

10. $\mathbf{v}_2 \in \mathbb{U}, \quad \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \notin \mathbb{U}$

11. $\dfrac{1}{2}\sqrt{110}$

12. $\arccos \dfrac{5}{6}$

13. $\begin{pmatrix} 0 & -4 & -10 \\ 0 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} -5 & 14 & 8 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$

15. Skriv på matrisform och beräkna nollställena till determinanten av koefficientmatrisen. Vi får

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b \\ -2 & a & -1 & a \\ a & 1 & 2 & -2 \end{array}\right), \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & a & -1 \\ a & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_1+3r_2 \\ r_3+2r_2}}{=} \begin{vmatrix} -5 & 2+3a & 0 \\ -2 & a & -1 \\ a-4 & 2a+1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{utv. efter} \\ \text{kolonn 3} \end{bmatrix} =$$

$$= (-1)\cdot(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -5 & 2+3a \\ a-4 & 2a+1 \end{vmatrix} = -10a - 5 - (a-4)(3a+2)$$

$$= 3 - 3a^2 = 0 \iff a = \pm 1.$$

Determinantkriteriet (Korollarium 4.7.2, sid 93) ger då att systemet har entydig lösning för alla $a \neq \pm 1$ oavsett värde på b. Vad som gäller för $a = \pm 1$ kontrolleras separat.

$$\underline{\underline{a = 1}}: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3-r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b \\ 0 & 5 & 5 & 2b+1 \\ 0 & -1 & -1 & -b-2 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+5r_3 \\ -r_3 \\ r_3\leftrightarrow r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b \\ 0 & 1 & 1 & b+2 \\ 0 & 0 & 0 & -3b-9 \end{array}\right)$$

Av ovanstående framgår att systemet är olösbart då a=1 om b≠−3. För b=−3 fås

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{r_1-2r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

$$\underline{\underline{a = -1}}: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b \\ -2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3+r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b \\ 0 & 3 & 5 & 2b-1 \\ 0 & 3 & 5 & b-2 \end{array}\right) \overset{r_3-r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b \\ 0 & 3 & 5 & 2b-1 \\ 0 & 0 & 0 & -b-1 \end{array}\right)$$

Av ovanstående framgår att systemet är olösbart då $a = -1$ om $b \neq -1$. Om $b = -1$ fås

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2y-3z = -1+2+10t-9t = 1+t \\ -1-(5z/3) = -1-5t \\ 3t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Sammanfattningsvis fås alltså:

(a) entydig lösning för alla $b \in \mathbb{R}$ om $a \neq \pm 1$,

(b) ingen lösning om $a = 1$, $b \neq -3$ eller $a = -1$, $b \neq -1$,

(c) oändligt många lösningar, med lösningsmängden i (1), då $a = 1$ och $b = -3$ och med lösningsmängden i (2) då $a = b = -1$.

16. Lös beroendeekvationen och utse med ledning därav, löjliga element. Enligt Satsen om löjliga element, sats 5.3.16, sid 111 kan dessa strykas ur definitionen av höljet utan att höljet ändras. Kalla de genererande vektorerna $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$. Parallellt med beroendeekvationen studerar vi också ekvationen "Linjärkombination av $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ = godtycklig vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$". Vi får

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 + \lambda_4 \mathbf{u}_4 = \lambda_1 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \mathbf{x}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & x_1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & x_4 \end{array}\right) \underset{\substack{r_2+r_1 \\ r_3-r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 0 & x_1+x_2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -x_1+x_3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & x_4 \end{array}\right) \underset{\substack{r_2+3r_3 \\ r_4+3r_3 \\ -r_3 \\ r_3 \leftrightarrow r_2}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & x_1-x_3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & -2x_1+x_2+3x_3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & -3x_1+3x_3+x_4 \end{array}\right) \underset{r_4-2r_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & x_1-x_3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & -2x_1+x_2+3x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1-2x_2-3x_3+x_4 \end{array}\right)$$

Vi börjar med att lösa beroendeekvationen.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda_2 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 - \lambda_4 = -t \\ t \\ 2\lambda_3 = 2t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Insättning i beroendeekvationen av lösningen för $t = 1$ ger

$$0{\cdot}\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 + 2\mathbf{u}_4 = \mathbf{0} \iff \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_4,$$

d v s vi kan utse $\mathbf{u}_3$ till löjligt element. Satsen om löjliga element, sats 5.3.16, sid 111 ger då att

$$\mathbb{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cancel{\mathbf{u}_3}, \mathbf{u}_4] = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4].$$

Eftersom lösningen till beroendeekvationen var en-parametrig finns det efter strykningen av $\mathbf{u}_3$ inte längre några löjliga element kvar. Enligt sats 5.4.4, sid 114 är då de återstående vektorerna linjärt oberoende.
Vidare ser vi att ekvationen "Linjärkombination av $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ = godtycklig vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$" är lösbar omm $x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$. Detta betyder att vektorn $\mathbf{x}$ är en linjärkombination av $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$, d v s $\in \mathbb{U}$, omm $x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$. Följaktligen

$$\mathbb{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4] = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0\right\}.$$

Låt $\mathbf{v}_1 = (3, 1, 1, 2)$ och $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1, 1)$. Insättning i ekvationen ger

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v}_1\colon 3 - 2{\cdot}1 - 3{\cdot}1 + 2 = 0 \Longrightarrow \mathbf{v}_1 \in \mathbb{U}\\
&\mathbf{v}_2\colon 1 - 2{\cdot}0 - 3{\cdot}1 + 1 = -1 \neq 0 \Longrightarrow \mathbf{v}_2 \notin \mathbb{U}.
\end{aligned}$$