Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ulf Janfalk

Kurskod: TATA31
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA31/TEN1) 2016–08–20, 14–19.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.
För godkänt räcker 9 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ($\geq$ 11p) ht2015 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas) och 16p eller mer ger 4 poäng på uppgift 1. Markera detta genom att skriva ”G” respektive ”G+1” i rutan för uppgift 1.
Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar läggs ut efter skrivtidens slut på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Resultat meddelas via e-post inom 10 arbetsdagar.
Alla koordinater för vektorer och punkter är, om ej annat anges, givna med avseende på ett positivt orienterat ON-system, $\mathbb{R}^n$ är ett euklidiskt rum med standardskalärprodukten och standardbasen ett positivt orienterat ON-system.

(1 p) 1. (a) Låt

$$L_1\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$L_2\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ange ekvationen för planet som innehåller L_1 och är parallellt med L_2.

(1 p) (b) Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Av nedan angivna matrisprodukter, beräkna dem som är definierade.

$$AB, \quad BA, \quad BC, \quad AC^t$$

(1 p) (c) Rita i ett vanligt tvåaxligt koordinatsystem in vektorerna $\mathbf{u} = (7, 3)$, $\mathbf{v} = (-2, 1)$ och den ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{u}$. **Skala:** Två rutor per längdenhet.

2. Bestäm minstakvadratlösningen till matrisekvationen $AX = Y$ där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{och } Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Utnyttja minstakvadratlösningen ovan till att beräkna ortogonalprojektionen av $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$ på underrummet $\mathbb{U} = [(1, 0, 1), (1, 1, -1)]$ och därefter beräkna avståndet mellan $\mathbb{U}$ och $\mathbf{v}$.

3. För vilka värden på α utgör de fyra polynomen

$$\mathbf{p}_1 = 1 - 2x + 4x^2 + x^3, \qquad \mathbf{p}_2 = 2 - 3x + 9x^2 - x^3,$$
$$\mathbf{p}_3 = 7 - 12x + 30x^2 + \alpha^2 x^3, \qquad \mathbf{p}_4 = -1 + 4x + 2\alpha x^2 - 7x^3$$

en bas i $\mathbb{P}_3$? För varje värde på $\alpha \in \mathbb{R}$, bestäm $\dim \mathbb{V}$.

4. Bestäm en ON-bas i $\mathbb{V} = \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0\big\}$ och fyll ut denna till en ON-bas för $\mathbb{R}^4$. Dela upp $\mathbf{v} = (1, 2, 3, 4)$ i komponenter $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{V}$ och $\mathbf{v}_2 \perp \mathbb{V}$ så att $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

5. Bestäm största och minsta värde av

$$Q(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 2xz - 2yz$$

då $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Ange också i vilka punkter dessa värden antas.

6. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ har i standardbaserna för respektive rum matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Vad är i så fall n och m? Bestäm baser i noll- och värderum samt *alla* $\mathbf{x}$ sådana att $F(\mathbf{x}) = (1, 2, -1, 1, -3)$.

7. Gäller påståendena nedan? Bevisa eller motbevisa.

(a) Mängden av alla 3×3-matriser A där $\det A = 0$ är ett underrum av rummet av 3×3-matriser.

(b) x^2 är en egenvektor med egenvärde 2 till avbildningen $F\colon \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ som definieras av att $F(p(x)) = xp'(x)$.

(c) Den kvadratiska formen $Q(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy$ är positivt semi-definit.

Lösningsförslag till TATA31, Linjär algebra, 2016–08–20

1. (a) Av förutsättningarna följer det att det sökta planets normal är ortogonal mot de båda linjernas riktningsvektorer, d v s parallell med deras krysspodukt och att punkten $(1, 2, 3)$ tillhör planet.

$$\mathbf{n} \parallel \underline{\mathbf{e}} \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ 1 \\ 0 \end{array} \times \underline{\mathbf{e}} \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 1 \\ 2 \end{array} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\,\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \Pi\colon x - y + z = D.$$

Insättning av $(1, 2, 3)$ ger $D = 1 - 2 + 3 = 2$, d v s $\Pi\colon x - y + z = 2$.

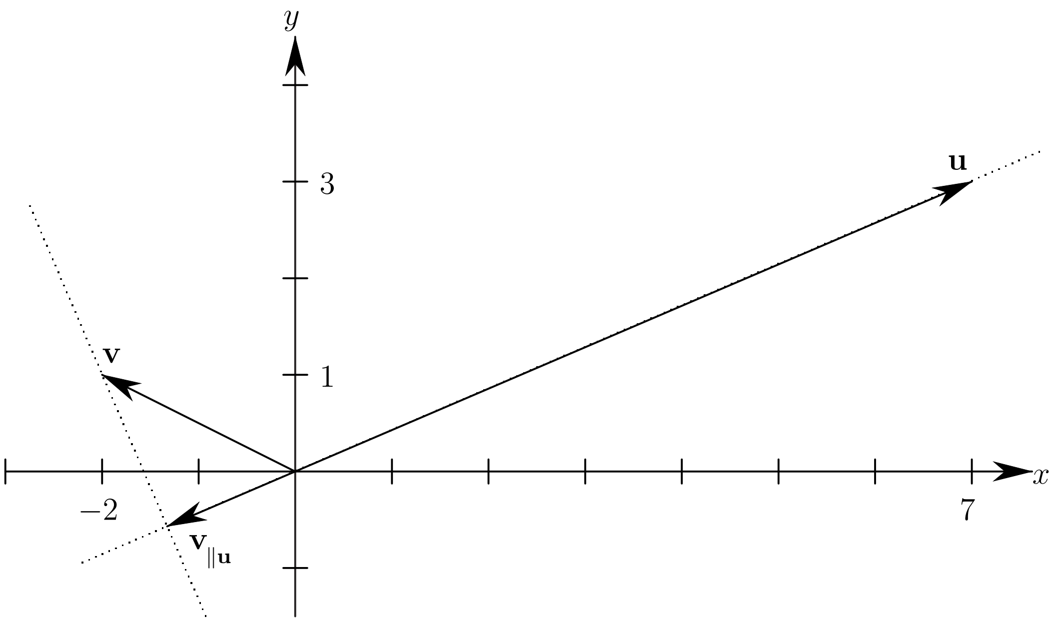
(b) Endast BA är odefinierad. De andra blir

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 8 \\ -5 & 1 & 18 \end{pmatrix},$$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 4 & -7 \end{pmatrix},$$

$$AC^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 10 & -11 & 5 \end{pmatrix}.$$

(c) $\mathbf{v}_{\parallel\mathbf{u}} = \dfrac{\mathbf{v}\bullet\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2}\mathbf{u} = \dfrac{1}{58}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = -\dfrac{11}{58}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ (Efterfrågas ej. Det är figuren som betyder nåt.)



2. Minstakvadratlösningen fås genom att lösa ekvationen $A^tAX = A^tY$. Beräkna de ingående matrisprodukterna.

$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^tY = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vi får ekvationen

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Sats 6.4, sid 158 ger då att

$$\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = \underline{\mathbf{e}}\, AX = \underline{\mathbf{e}}\, \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Avståndet mellan $\mathbb{U}$ och $\mathbf{v}$ definieras som

$$\min_{\mathbf{u}\in\mathbb{U}} |\mathbf{v}-\mathbf{u}| = \Big[\text{Sats 6.3.15, sid 150}\Big] = \left|\mathbf{v}-\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}\right| = \left|\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}\right| =$$
$$= \frac{1}{6}\left|\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}\right)\right| = \frac{1}{6}\left|\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

3. Eftersom $\dim \mathbb{P}_3 = 4$ har vi är "rätt antal element". Därmed räcker det att visa att $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$ är linjärt oberoende för att de skall vara en bas. Beroendeekvationen för $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$ blir ($\underline{\mathbf{x}}$ =standardbasen i $\mathbb{P}_3$)

$$\lambda_1\mathbf{p}_1 + \lambda_2\mathbf{p}_2 + \lambda_3\mathbf{p}_3 + \lambda_4\mathbf{p}_4 = \lambda_1(1-2x+4x^2+x^3) + \lambda_2(2-3x+9x^2-x^3)+$$
$$+\lambda_3(7-12x+30x^2+\alpha^2x^3) + \lambda_4(-1+4x+2\alpha x^2-7x^3) =$$
$$= \lambda_1\,\underline{\mathbf{x}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2\,\underline{\mathbf{x}}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3\,\underline{\mathbf{x}}\begin{pmatrix} 7 \\ -12 \\ 30 \\ \alpha^2 \end{pmatrix} + \lambda_4\,\underline{\mathbf{x}}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2\alpha \\ -7 \end{pmatrix} =$$
$$= \underline{\mathbf{x}}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & -1 \\ -2 & -3 & -12 & 4 \\ 4 & 9 & 30 & 2\alpha \\ 1 & -1 & \alpha^2 & -7 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Sats 4.7.1, sid 92 ger då att

$$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 \text{ är linjärt oberoende } \Longleftrightarrow \det A \neq 0.$$

Vi får

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & -1 \\ -2 & -3 & -12 & 4 \\ 4 & 9 & 30 & 2\alpha \\ 1 & -1 & \alpha^2 & -7 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3-4r_1 \\ r_4-r_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4+2\alpha \\ 0 & -3 & -7+\alpha^2 & -6 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Utvecklar efter} \\ \text{kolonn 1} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4+2\alpha \\ -3 & -7+\alpha^2 & -6 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-r_1 \\ r_3+3r_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2+2\alpha \\ 0 & -1+\alpha^2 & 0 \end{vmatrix} = -\left(\alpha^2-1\right)(2\alpha+2) =$$

$$= -2(\alpha+1)^2(\alpha-1) = 0 \iff \alpha = \pm 1,$$

d v s $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$ är en bas i $\mathbb{P}_3$ omm $\alpha \neq \pm 1$.
Detta betyder också att $\dim \mathbb{V} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4] = 4$ om $\alpha \neq \pm 1$. Bestäm $\dim \mathbb{V}$ då $\alpha = 1$ och -1. $\alpha = 1$ ger

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 7 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & -12 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & 30 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -7 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3-4r_1 \\ r_4-r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -6 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3-r_2 \\ r_4+3r_2}}{=} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \Longrightarrow \mathbf{p}_3 = 3\mathbf{p}_1 + 2\mathbf{p}_2,$$

d v s $\mathbf{p}_3$ kan utses till löjligt element. Satsen om löjliga element ger då att $\mathbb{V} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_4]$. Då det nu inte finns några fler löjliga element följer det att $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_4$ är linjärt oberoende och därmed en bas i $\mathbb{V}$ så att $\dim \mathbb{V} = 3$.
$\alpha = -1$ ger

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 7 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & -12 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & 30 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -7 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3-4r_1 \\ r_4-r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -6 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3-r_2 \\ r_4+3r_2}}{=} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4s+4t-7s+t = -3s+5t \\ -2s-2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} s = 1, t = 0 \Longrightarrow -3\mathbf{p}_1 - 2\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = \mathbf{0} \iff \mathbf{p}_3 = 3\mathbf{p}_1 + 2\mathbf{p}_2 \\ s = 0, t = 1 \Longrightarrow 5\mathbf{p}_1 - 2\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_4 = \mathbf{0} \iff \mathbf{p}_4 = -5\mathbf{p}_1 + 2\mathbf{p}_2 \end{cases},$$

d v s $\mathbf{p}_3$ och $\mathbf{p}_4$ kan utses till löjliga element. Satsen om löjliga element ger då att $\mathbb{V} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2]$. Då det nu inte finns några fler löjliga element följer det att $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ är linjärt oberoende och därmed en bas i $\mathbb{V}$ så att $\dim \mathbb{V} = 2$.
Sammanfattningsvis, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$ är en bas i $\mathbb{P}_3$ om $\alpha \neq \pm 1$ och då är $\dim \mathbb{V} = 4$. Om $\alpha = 1$ är $\dim \mathbb{V} = 3$ och om $\alpha = -1$ är $\dim \mathbb{V} = 2$.

4. Skulle vi skriva lösningen till den för $\mathbb{V}$ definierande ekvationen skulle vi behöva tre parametrar. Således är $\dim \mathbb{V} = 3$. Vi väljer därför tre linjärt oberoende vektorer på ett smart sätt så vi slipper använda Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess i onödan. Välj

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alla tre ligger uppenbarligen i $\mathbb{V}$ eftersom de uppfyller ekvationen för $\mathbb{V}$, $\mathbf{f}_1 \perp \mathbf{f}_2$ och $|\mathbf{f}_1| = |\mathbf{f}_2| = 1$. Ortogonalisera $\mathbf{u}_3$ med avseende på $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$.

$$\mathbf{u}_{3_{\|[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = (\mathbf{u}_3 \bullet \mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 + (\mathbf{u}_3 \bullet \mathbf{f}_2)\,\mathbf{f}_2 = \frac{1}{2}\left(-\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_{3_{\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_{3_{\|[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och vi väljer $\mathbf{f}_3 = \mathbf{u}_{3_{\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}}$ eftersom $|\mathbf{u}_{3_{\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}}| = 1$.

För att hitta utfyllnaden till en ON-bas för $\mathbb{R}^4$ skriver vi ekvationen för $\mathbb{V}$ som en skalärprodukt:

$$0 = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

d v s $\mathbb{V}$ består av de vektorer i $\mathbb{R}^4$ som är ortogonala mot $(1, 1, 1, -1)$. Följaktligen får vi en ON-bas för $\mathbb{R}^4$ om vi fyller ut den befintliga ON-basen för $\mathbb{V}$ med denna vektor normerad, d v s $\mathbf{f}_4 = (1, 1, 1, -1)/2$.

Enklast blir att beräkna $\mathbf{v}_2$ eftersom

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{\|\mathbf{f}_4} = \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} - \mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

5. Börja med att skriva Q på matrisform. Vi får

$$Q(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 2xz - 2yz = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X^t A X.$$

Beräkna egenvärdena till A.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} \overset{r_2+r_1}{=} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} \overset{k_1-k_2}{=}$$

$$= (4-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)((4-\lambda)(5-\lambda)-2) = (4-\lambda)(\lambda^2-9\lambda+18) =$$
$$= (4-\lambda)(\lambda-6)(\lambda-3) = 0 \iff \lambda = 3, 4, 6.$$

Sats 9.1.11, sid 227, ger med $|\mathbf{u}|^2 = x^2+y^2+z^2 = 3$ att

$$\lambda_{\min}|\mathbf{u}|^2 = 3{\cdot}3 = 9 \le Q(\mathbf{u}) \le 6{\cdot}3 = 18 = \lambda_{\max}|\mathbf{u}|^2$$

med likhet i respektive olikhet då $\mathbf{u}$ är en egenvektor till respektive egenvärde av längd $\sqrt{3}$. Vi beräknar därför egenvektorerna till 3 och 6.

$$\underline{\underline{\lambda = 3}}: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{r_3-r_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{r_3+r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X_3 = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 6}}: \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_1+2r_3 \\ r_1\leftrightarrow r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3+r_2 \\ -r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X_3 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Följaktligen,

$$\min_{|\mathbf{u}|=\sqrt{3}} Q(\mathbf{u}) = 9 \quad \text{för} \quad \mathbf{u} = \pm\sqrt{3}\frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \pm\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d v s min antas i punkterna $\pm(-1,1,1)$. Slutligen,

$$\max_{|\mathbf{u}|=\sqrt{3}} Q(\mathbf{u}) = 18 \quad \text{för} \quad \mathbf{u} = \pm\sqrt{3}\frac{1}{\sqrt{6}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

d v s max antas i punkterna $\pm(1,-1,2)/\sqrt{2}$.

6. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ säges ha avbildnigsmatrisen A med avseende på standardbaserna om avbildningen kan skrivas på formen

$$F(\mathbf{x}) = F(\underline{\mathbf{e}}_n X) = \underline{\mathbf{e}}_m AX.$$

Detta innebär att matrisprodukten AX där A är en $5{\times}4$-matris och X en $n{\times}1$-matris måste vara definierad. Följaktligen är $n = 4$ och produkten blir då en $5{\times}1$-matris, d v s $m = 5$ så att $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$.
För att bestämma en bas i $N(F)$ löser vi ekvationen $AX = \mathit{0}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3+r_1 \\ r_4-r_1 \\ r_5+3r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3+r_2 \\ r_5+r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3-2r_4 \\ r_5-r_4 \\ r_4\leftrightarrow r_3}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X = t\begin{pmatrix} -2t-5t=-7t \\ t \\ 0 \\ 5t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

d v s $(-7,1,0,5)$ är en bas i $N(F)$.
Eftersom $V(F) = [\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4]$ där $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4$ är avbildningsmatrisens kolonnvektorer så blir beroendeekvationen för dessa den ekvation vi precis löst. Följaktligen får vi med $t = 1$ att

$$-7\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + 5\mathbf{k}_4 = \mathbf{0} \iff \mathbf{k}_2 = 7\mathbf{k}_1 - 5\mathbf{k}_4,$$

d v s vi kan utse $\mathbf{k}_2$ till löjligt element. Satsen om löjliga element ger då att $V(F) = [\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4]$ och då det inte finns fler löjliga element är

$$\mathbf{k}_1 = (1,2,-1,1,-3), \quad \mathbf{k}_3 = (1,2,1,2,-2), \quad \mathbf{k}_4 = (1,3,-2,1,-4)$$

en bas i $V(F)$.
Låt nu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ vara sådant att $F(\mathbf{x}) = (1,2,-1,1,-3) = \mathbf{k}_1$. Då $F(1,0,0,0) = \mathbf{k}_1$ följer det att

$$F(\mathbf{x} - (1,0,0,0)) = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_1 = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{x} - (1,0,0,0) \in N(F) = [(-7,1,0,5)] \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \mathbf{x} = (1,0,0,0) + t(-7,1,0,5), \quad t \in \mathbb{R}.$$

7. (a) **Falskt!** Kalla den aktuella mängden M och låt, t ex

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Då gäller att $\det A_1 = \det A_2 = 0$ så att $A_1, A_2 \in M$. Då $A_1 + A_2$ =enhetsmatrisen I och $\det I = 1$ följer det att $A_1 + A_2 \notin M$, d v s M är inget underrum till rummet av 3×3-matriser.

(b) **Sant!** $F\left(x^2\right) = x\left(x^2\right)' = x(2x) = 2 \cdot x^2$, d v s x^2 är en egnvektor med egenvärde 2.

(c) **Sant!** $Q(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy = (x-2y)^2 + z^2 \geq 0$ för alla $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, d v s Q är antingen positivt definit eller positivt semi-definit. Samtidigt, om $z = 0$ och $x = 2y \neq 0$, d v s om $(x,y,z) = t(2,1,0)$, $t \neq 0$ så är $Q(2t,t,0) = 0$. Detta visar att Q är icke-negativ och har fler nollställen än $(0,0,0)$, d v s Q är positivt semi-definit.