Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ulf Janfalk

Kurskod: TATA31
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA31/TEN1) 2016–03–29, 8–13.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.
För godkänt räcker 9 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ($\geq$ 11p) ht2015 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas) och 16p eller mer ger 4 poäng på uppgift 1. Markera detta genom att skriva ”G” respektive ”G+1” i rutan för uppgift 1.
Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar läggs ut efter skrivtidens slut på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Resultat meddelas via e-post inom 10 arbetsdagar.
Alla koordinater för vektorer och punkter är, om ej annat anges, givna med avseende på ett positivt orienterat ON-system, $\mathbb{R}^n$ är ett euklidiskt rum med standardskalärprodukten och standardbasen ett positivt orienterat ON-system.

(2 p) 1. (a) Låt L vara linjen genom $(-1, 1, 2)$ med riktningsvektor $\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ och låt $P = (1, 2, 3)$. Bestäm avståndet mellan P och L samt vilken punkt på L som ger detta avstånd.

(1 p) (b) Beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(2 p) 2. (a) Låt $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som avbildar $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ dess ortogonalprojektion i planet med ekvation $-x + 2y + z = 0$. Ange F:s matris i standardbasen.

(1 p) (b) Verifiera att ditt svar är korrekt genom att med den i (a) beräknade matrisen beräkna

$$F(\text{planets normal}) \quad \text{och} \quad F(\text{vektor i planet}).$$

(3 p) 3. Betrakta nedanstående underrum av $\mathbb{R}^4$,

$$\mathbb{U} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4\colon x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\right\}, \quad \mathbb{V} = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

Som bekant så definieras $\mathbb{U} \cap \mathbb{V} = \{\mathbf{x}\colon \mathbf{x} \in \mathbb{U} \quad \text{och} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{V}\}$, d v s de $\mathbf{x}$ som tillhör båda rummen. Bestäm en bas i $\mathbb{U} \cap \mathbb{V}$.

VÄND!

(3 p) 4. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ har i standardbasen matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestäm en ON-bas i värderummet till F samt nollrummets dimension.

(3 p) 5. Vilken sorts yta definieras av uttrycket

$$2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 16?$$

Ange de punkter på ytan som ligger längst ifrån (om sådana finnes) respektive närmast origo samt de aktuella avstånden.

(3 p) 6. En ogenomskinlig triangulär skärm har hörn i punkterna

$$(1, -2, 1),\ (-1, 1, 0),\ (1, 1, -1).$$

En lampa som strålar ut ljus i alla riktningar placeras i origo. Avgör om punkten $(10, -60, 40)$ skuggas av skärmen eller inte.

(1 p) 7. (a) Låt $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning. Normen av F betecknas $\|F\|$ och definieras som

$$\|F\| = \max_{\substack{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \\ \mathbf{x}\neq\mathbf{0}}} \frac{|F(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|}.$$

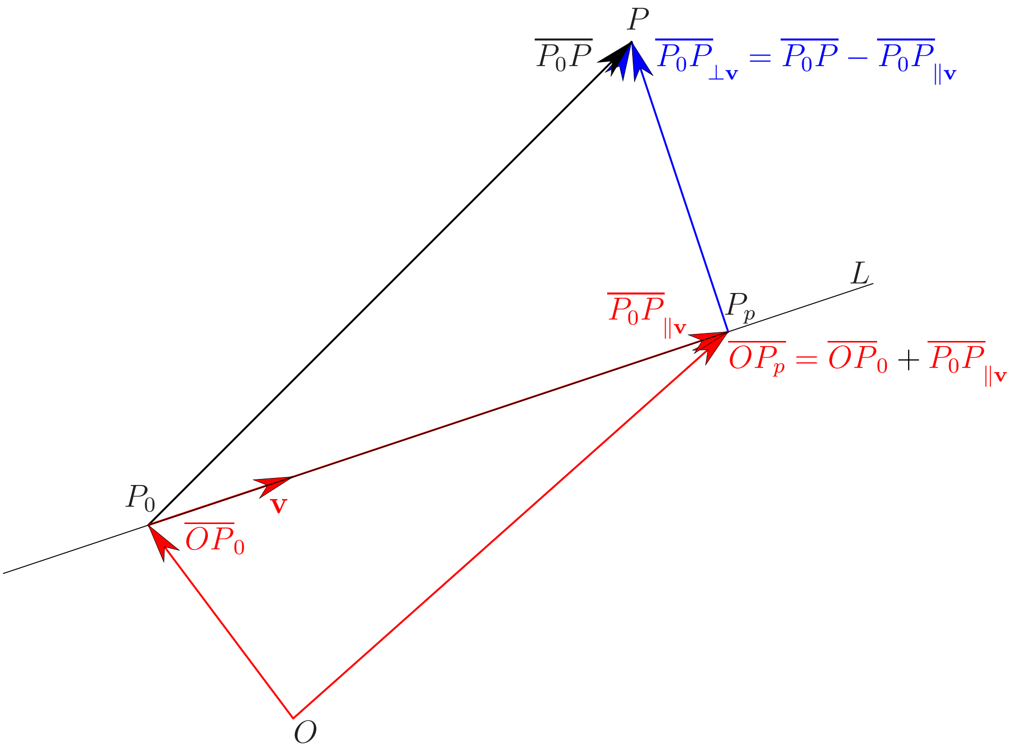
Visa att även

$$\max_{\substack{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \\ |\mathbf{x}|=1}} |F(\mathbf{x})| = \|F\|\,.$$

(2 p) (b) Låt $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som i standardbasen ges av matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Beräkna $\|F\|$.

Lösningsförslag till TATA31, Linjär algebra, 2016–03–29

1. (a) Kalla den sökta närmsta punkten P_p. Sätt $P_0 = (-1, 1, 2)$, $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ och beräkna $\overline{P_0P}_{\|\mathbf{v}}$, se figur nedan.



$$\overline{P_0P} = \overline{OP} - \overline{OP_0} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\overline{P_0P}_{\|\mathbf{v}} = \frac{\overline{P_0P}\bullet\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} = \frac{1}{14}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)\mathbf{v} = \frac{7}{14}\mathbf{v} = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

Med hjälp av denna kan vi nu räkna ut både närmsta punkt och avståndet

$$\overline{OP_p} = \overline{OP_0} + \overline{P_0P}_{\|\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\4\\7\end{pmatrix}$$

$$\overline{P_0P}_{\perp\mathbf{v}} = \overline{P_0P} - \overline{P_0P}_{\|\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} \Longrightarrow \text{avståndet} = \left|\overline{P_0P}_{\perp\mathbf{v}}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + (-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

(b) Utveckling efter rad/kolonn ger

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{utveckla efter} \\ \text{kolonn 2} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{utveckla efter} \\ \text{rad 4} \end{bmatrix} =$$

$$= 4(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 7 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{utveckla efter} \\ \text{rad 3} \end{bmatrix} =$$

$$= -(-1)^{3+1} 5 \cdot 4 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -20(28-10) = -360$$

2. (a) $F(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\|\mathbf{n}}$ där $\mathbf{n} = (-1, 2, 1)$ =planets normal. Då matrisens kolonner består av det F gör med standardbasen beräknar vi $F(\mathbf{e}_1)$, $F(\mathbf{e}_2)$ och $F(\mathbf{e}_3)$. Vi får

$$F(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 - \frac{1}{6}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 - \frac{1}{6}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$F(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3 - \frac{1}{6}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad A_{\underline{\mathbf{e}}} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(b) Som kontrollvektorer i planet tar vi $(2, 1, 0)$ och $(0, 1, -2)$ som ju utgör en bas i planet. Då vi vet att F(planets normal) $= \mathbf{0}$ och F(vektor i planet) =samma vektor i planet kontrollerar vi

$$F(-1, 2, 1) = \underline{\mathbf{e}}\,\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

$$F(2,1,0) = \underline{\mathbf{e}}\,\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = (2,1,0),$$

$$F(0,1,-2) = \underline{\mathbf{e}}\,\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} = (0,1,-2). \qquad \textbf{VSB.}$$

3. Kalla vektorerena som genererar $\mathbb{V}$ för $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$. Skriv sedan om $\mathbb{V}$ som lösningsrum genom att bilda en linjärkombination och sätta lika med godtycklig vektor.

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{x} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & -1 & 1 & x_4 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+r_1 \\ r_3+r_1 \\ r_2\leftrightarrow r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_1+x_3 \\ 0 & 2 & 1 & x_1+x_2 \\ 0 & -1 & 1 & x_4 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3-2r_2 \\ r_4+r_2}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_1+x_3 \\ 0 & 0 & -1 & -x_1-2x_3+x_2 \\ 0 & 0 & 2 & x_1+x_3+x_4 \end{array}\right) \overset{r_4+2r_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_1+x_3 \\ 0 & 0 & -1 & -x_1+x_2-2x_3 \\ 0 & 0 & 0 & -x_1+2x_2-3x_3+x_4 \end{array}\right).$$

Ur detta ser vi att ekvationen är lösbar omm $-x_1+2x_2-3x_3+x_4=0$. Följaktligen är det denna som blir ekvation för $\mathbb{V}$. Lös sedan ekvationssystemet vi får då ekvationerna för båda rummen skall vara satisfierade, d v s

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \overset{ekv_2+ekv_1}{\iff} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \quad + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s+2t-3s-3t = -5s-t \\ (6s-6t)/3 = 2s-2t \\ 3s \\ 3t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad s,t \in \mathbb{R}$$

d v s $(-5,2,3,0), (-1,-2,0,3)$ är en bas i $\mathbb{U}\cap\mathbb{V}$.

4. Kalla matrisens kolonner $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4$ och sätt upp beroendeekvationen för dessa. Då detta också är ekvationen för att beräkna $N(F)$ får vi också ut den efterfrågade dimensionen av $N(F)$.

$$\lambda_1\mathbf{k}_1 + \lambda_2\mathbf{k}_2 + \lambda_3\mathbf{k}_3 + \lambda_4\mathbf{k}_4 = \mathbf{0} \iff \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+r_1 \\ r_3-r_1 \\ r_4+r_3}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3-2r_2 \\ r_3+r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_4+2r_3 \\ -r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-2t=-t \\ t \\ -8t \\ 2t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \Longrightarrow \mathbf{k}_4 = \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 + 8\mathbf{k}_3),$$

d v s vi kan utse $\mathbf{k}_4$ till löjligt element så att

$$V(F) = [\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4] = [\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3]$$

enligt satsen om löjliga element, sats 5.3.16,sid 111. Då lösningen till beroendeekvationen blev en-parametrig följer det också att $\dim N(F) = 1$.
Vi observerar att $\mathbf{k}_1 \perp \mathbf{k}_2$ varför vi normerar dessa för att sedan ortogonalisera $\mathbf{k}_3$.

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{20}}\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{3_{\|[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{20}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{4}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{5}{20}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\underline{\mathbf{e}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{3_{\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_{3_{\|[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

och $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ är en ON-bas i $V(F)$.

5. Skriv om på matrisform och beräkna egenvärden och egenvektorer.

$$Q(\mathbf{u}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 =$$
$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = X^t A X = 16.$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{r_2-r_1}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ \lambda-2 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (\lambda - 2)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{k_1+k_2}{=} (\lambda - 2)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}\text{utveckla}\\ \text{efter rad 3}\end{bmatrix} = -(\lambda-2)\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ -2 & 3-\lambda\end{vmatrix} =$$
$$= -(\lambda-2)((2-\lambda)(3-\lambda)-2) = -(\lambda-2)\left(\lambda^2-5\lambda+4\right) =$$
$$= -(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-4) = 0 \iff \lambda = 1, 2, 4.$$

Då alla tre egenvärdena är posistiva är ytan en ellipsoid.
För att bestämma de sökta avstånden använder vi sats 9.1.11,sid 227. Vi får då att

$$\lambda_{min}\,|\mathbf{u}|^2 = |\mathbf{u}|^2 \le Q(\mathbf{u}) = 16 \le 4\,|\mathbf{u}|^2 = \lambda_{max}\,|\mathbf{u}|^2 \iff$$
$$\iff \frac{16}{\lambda_{max}} = 4 \le |\mathbf{u}|^2 \le 16 = \frac{16}{\lambda_{min}}$$

och vi har likhet i respektive olikhet då $\mathbf{u}$ är en egenvektor av rätt längd till respektive egenvärde. Följaktligen är minsta avståndet 2 och fås då $\mathbf{u}$ är en egenvektor av längd 2 till egenvärdet 4 och största avståndet är 4 och fås då $\mathbf{u}$ är en egenvektor av längd 4 till egenvärdet 1. För att kunna ange vilka de sökta punkterna är beräknar vi egenvektorerna till 1 och 4.

$$\underline{\underline{\lambda = 1}}: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 2 & 0\end{array}\right) \overset{r_3+r_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right) \overset{r_3+r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$X_1 = t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \Longrightarrow \overline{OP}_{\max} = \pm 4\frac{1}{\sqrt{3}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 4}}: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -2 & -1 & 0\\ -1 & -1 & -1 & 0\end{array}\right) \overset{\substack{2r_3+r_1\\ -r_1\\ -r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\end{array}\right) \overset{r_3-r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \Longrightarrow$$

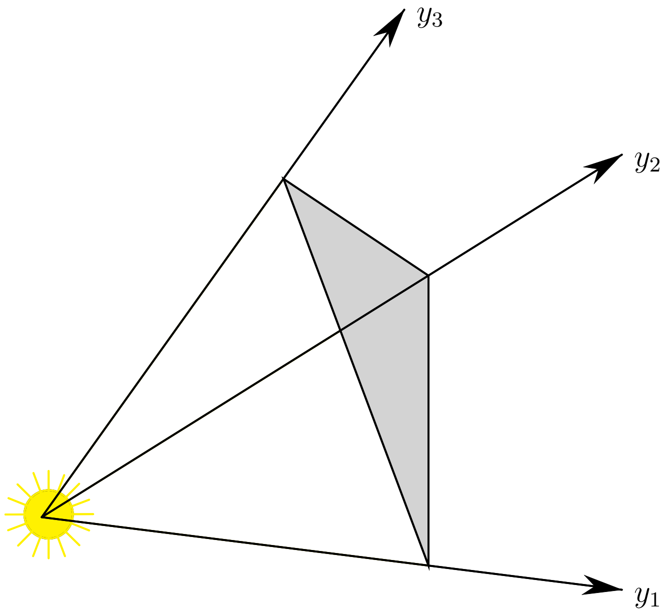
$$X_4 = t\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \Longrightarrow \overline{OP}_{\min} = \pm 2\frac{1}{\sqrt{6}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},$$

d v s de på ytan från origo närmsta punkterna, avstånd 2, är $\pm\dfrac{2}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$ och de fjärmsta, avstånd 4, är $\pm\dfrac{4}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

6. Inför en ny bas där ortsvektorerna för triangelns hörn blir de nya basvektorerna, dvs

$$\mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\ \mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \mathbf{f}_3 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\ \underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}T = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Då koordinaterna för hörnen i den nya basen blir $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ blir ekvationen för planet som triangeln ligger i $y_1+y_2+y_3 = 1$. Följaktligen, om koordinaterna för $(10, -60, 40)$ blir positiva och om summan av de nya koordinaterna blir > 1 så ligger punkten i skugga, annars inte (se figur).



Beräkna T^{-1} på vanligt sätt.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3-r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3+r_2 \\ -r_2}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+3r_3 \\ r_1-r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{r_1+r_2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{OP} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 10 \\ -60 \\ 40 \end{pmatrix} = 10\,\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \left[\underline{\mathbf{e}} = \underline{\mathbf{f}}\,T^{-1}\right] = 10\,\underline{\mathbf{f}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= 10\,\underline{\mathbf{f}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Då y_3-koordinaten är negativ följer det att punkten inte skuggas av skärmen.

7. (a) Utnyttja att $\lambda F(\mathbf{x}) = F(\lambda \mathbf{x})$ eftersom F är linjär

$$\max_{\substack{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\\ \mathbf{x}\neq\mathbf{0}}} \frac{|F(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|} = \max_{\substack{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\\ \mathbf{x}\neq\mathbf{0}}} \left|\frac{1}{|\mathbf{x}|}F(\mathbf{x})\right| = \max_{\substack{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\\ \mathbf{x}\neq\mathbf{0}}} \left|F\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\mathbf{x}\right)\right| = \left[\begin{array}{c}\mathbf{y} = \frac{1}{|\mathbf{x}|}\mathbf{x}\\ \Longrightarrow |\mathbf{y}| = 1\end{array}\right] =$$

$$= \max_{\substack{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\\ |\mathbf{x}|=1}} |F(\mathbf{x})| \qquad \textbf{VSB.}$$

(b) Kalla F:s matris för A. Man kan antingen beräkna $|F(\mathbf{x})|$ direkt eller så går man via matrisformuleringen. Vi gör matrisvarianten här eftersom den visar tydligare vad man beräknar och hur detta är kopplat till F:s matris.

$$|F(\mathbf{x})|^2 = F(\underline{\mathbf{e}}\,X)\bullet F(\underline{\mathbf{e}}\,X) = (\underline{\mathbf{e}}\,AX)\bullet(\underline{\mathbf{e}}\,AX) = (AX)^t AX = X^t A^t AX.$$

Detta är en kvadratisk form med matris A^tA. Enligt (a) räcker det att undersöka $\mathbf{x}$ sådana att $|\mathbf{x}| = 1$. Ur sats 9.1.11,sid 227 följer då att

$$|F(\mathbf{x})|^2 = X^t A^t AX \leq \lambda_{max}$$

med likhet om $\mathbf{x}$ är en egenvektor med $|\mathbf{x}| = 1$ till λ_{max}. För ett sådant $\mathbf{x}_{max}$ följer då att

$$\|F\| = |F(\mathbf{x}_{max})| = \sqrt{\lambda_{max}}.$$

Återstår alltså att beräkna egenvärdena till A^tA.

$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 14\\ 14 & 20\end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 10-\lambda & 14\\ 14 & 20-\lambda\end{vmatrix} = (10-\lambda)(20-\lambda) - 14^2 =$$

$$= \lambda^2 - 30\lambda + 4 = 0 \iff \lambda = 15 \pm \sqrt{221} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \|F\| = \sqrt{\lambda_{max}} = \sqrt{15 + \sqrt{221}}.$$