Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ulf Janfalk

Kurskod: TATA31
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA31/TEN1) 2016–01–11, 14–19.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.
För godkänt räcker 9 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ($\geq$ 11p) ht2015 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas) och 16p eller mer ger 4 poäng på uppgift 1. Markera detta genom att skriva ”G” respektive ”G+1” i rutan för uppgift 1.
Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar läggs ut efter skrivtidens slut på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Resultat meddelas via e-post inom 10 arbetsdagar.
Alla koordinater för vektorer och punkter är, om ej annat anges, givna med avseende på ett positivt orienterat ON-system, $\mathbb{R}^n$ är ett euklidiskt rum med standardskalärprodukten och standardbasen ett positivt orienterat ON-system.

(3 p) 1. Bestäm $a \in \mathbb{R}$ så att linjerna

$$L_1\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L_2\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -a \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

skär varann. Ange skärningspunkten och planet som innehåller båda linjerna.

(3 p) 2. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ definieras av

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 3x_5\,,\ 2x_1 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5\,,\ -x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5).$$

Bestäm matrisen till F med avseende på standardbaserna för $\mathbb{R}^5$ och $\mathbb{R}^3$. Bestäm sedan baser i noll- respektive värderum samt dimensionen av dessa.

(3 p) 3. Låt $F, G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara två linjära avbildningar med matriser

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{respektive} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

i standardbasen, d v s A är matris till F och B är matris till G. Ange matrisen för $F \circ G$ i standardbasen. Bestäm $F \circ G(1, 2, 0)$ och ange *alla* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ sådana att $F \circ G(\mathbf{u}) = F \circ G(1, 2, 0)$.
(Som bekant så definieras $F \circ G$ genom att $F \circ G(\mathbf{u}) = F(G(\mathbf{u}))$.)

VÄND!

(3 p) 4. Låt $\mathbf{v} = (3, -1, 7, 3)$ och

$$\mathbb{U} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Bestäm

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{U}} |\mathbf{v} - \mathbf{u}|$$

samt för vilket $\mathbf{u} \in \mathbb{U}$ som detta minsta värde antas.

5. Låt $a \in \mathbb{R}$ och den kvadratiska formen $Q \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definieras av

$$Q(x, y, z) = 2x^2 + 4xz + 4y^2 + 4yz + az^2.$$

(2 p) (a) För varje värde på $a \in \mathbb{R}$, avgör Q:s teckenkaraktär.

(1 p) (b) Bestäm egenvärdena till Q i fallet $a = 3$ och kontrollera att detta stämmer med ditt svar i (a).

(3 p) 6. Bestäm $a \in \mathbb{R}$ så att 1 blir egenvärde till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & a \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestäm sedan C så att

$$\lim_{n \to \infty} A^n \begin{pmatrix} 1 \\ C \end{pmatrix}$$

existerar och ange gränsvärdet.

7. Avbildningen $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har matrisen

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 4 & -4 & 7 \\ 8 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

i standardbasen.

(2 p) (a) Visa att F är en vridning och ange vridningsaxeln.

(1 p) (b) Bestäm cosinus av vridningsvinkeln genom att beräkna vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $F(\mathbf{u})$ för något lämpligt valt $\mathbf{u}$ (vad är ett lämpligt $\mathbf{u}$?).

Lösningsförslag till TATA31, Linjär algebra, 2016–01–11

1. $L_1 = L_2$ ger

$$\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -a \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1-a \\ -a-1 \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & -a-1 \\ 1 & 1 & -a-1 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3+r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 3 \\ 0 & -8 & 5-a \\ 0 & -2 & 2-a \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-4r_3 \\ r_3 \leftrightarrow r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 2-a \\ 0 & 0 & 3a-3 \end{array}\right),$$

d v s systemet är lösbart omm $a = 1$. Lösningen blir då

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

Insättning i parameterformen för L_1 ger ortsvektorn för skärningspunkten P

$$\overline{OP} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{e}} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

För kontrollens skull, sätt in $-1/2$ i parameterformen för L_2 och se att du får samma punkt.
Det sökta planets Π normal fås genom att beräkna kryssprodukten mellan linjernas riktningsvektorer.

$$\begin{array}{ccccl} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \times & \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} & = & \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = -2\, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \Pi\colon 2x - y + 4z = D \\ -1 & & 3 & & \\ 2 & & 2 & & \end{array}$$

$$(0,1,1) \in \Pi \Longrightarrow 2\cdot 0 - 1 + 4\cdot 1 = 3 = D,$$

d v s $\Pi\colon 2x - y + 4z = 3$

2. Skriv på “bas koordinatform”,

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = F\left(\underline{\mathbf{e}}_5 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \right) = \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 3x_5 \\ 2x_1 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 \\ -x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix},$$

d v s den sökta avbildningsmatrisen är

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

För att bestämma en bas i $N(F)$ löser vi $AX = \mathit{0}$ på vanligt sätt

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_2\leftrightarrow r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & -8 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3-4r_1 \\ -r_2}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{r_1-2r_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X = \begin{pmatrix} -r-s+t \\ r-s-2t \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r, s, t \in \mathbb{R},$$

d v s $(-1, 1, 1, 0, 0), (-1, -1, 0, 1, 0), (1, -2, 0, 0, 1)$ är en bas i $N(F)$ som därmwed får dimension 3.
Enligt Sats 7.5.4, sid 181, är värderummet detsamma som höljet av avbildningsmatrisens kolonnvektorer och beroendeekvationen för dessa är det ekvationssystem vi precis löst. Kalla kolonnvektorerna $\mathbf{k}_1, \ldots \mathbf{k}_5$. Då fås

$$\begin{aligned} &\underline{\underline{r = 1,\ s = 0,\ t = 0}}: \qquad && \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 \\ &\underline{\underline{r = 0,\ s = 1,\ t = 0}}: && \mathbf{k}_4 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \\ &\underline{\underline{r = 0,\ s = 0,\ t = 1}}: && \mathbf{k}_5 = -\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2. \end{aligned}$$

Satsen om löjliga element (sats 5.3.16, sid 111) ger då att

$$V(F) = [\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4, \mathbf{k}_5] = [\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2].$$

Då de löjliga elementen nu är strukna så är de återstående, $\mathbf{k}_1$ och $\mathbf{k}_2$ linjärt oberoende (sats 5.4.4, sid 114). Därmed är $\mathbf{k}_1$ och $\mathbf{k}_2$ en bas i $V(F)$ och $\dim V(F) = 2$.

3. Enligt Sats 7.6.2, sid 186 är AB avbildningsmatris till $F \circ G$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & -12 & 9 \\ -6 & 4 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow F \circ G(1, 2, 0) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & -12 & 9 \\ -6 & 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 6 \\ -24 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lös nu ekvationssystemet $F \circ G(\mathbf{u}) = (6, -24, 2)$,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & -12 & 9 & -24 \\ -6 & 4 & -4 & 2 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3+r_1 \\ -r_2/3}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & -3 & 8 \\ 0 & -12 & 9 & -24 \end{array}\right) \overset{r_3+3r_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X = \begin{pmatrix} (6 - x_3)/6 = 1 - 2t \\ (8 + 3x_3)/4 = 2 + 9t \\ 12t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

d v s om $F \circ G(\mathbf{u}) = (6, -24, 2)$ så gäller $\mathbf{u} = (1, 2, 0) + t(-2, 9, 12)$ för något $t \in \mathbb{R}$.

4. Enligt sats 6.3.15, sid 150 erhålls det minsta avståndet då $\mathbf{u} = \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}$, d v s det sökta avståndet blir

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{U}} |\mathbf{v} - \mathbf{u}| = \left|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}\right| = \left|\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}\right|. \tag{1}$$

Problemet kan lösas på flera sätt.
Alternativ 1: Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$. Beräkna sedan $\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}$ genom ortogonalprojektion i enlighet med sats 6.3.9, sid 146 och det sökta avståndet som i (1) ovan.
Alternativ 2: Beräkna $\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}$ genom att använda minstakvadrat-metoden. Fortsätt sedan som i alternativ 1.
Alternativ 3: Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}^\perp$ och beräkna $\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}} = \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}^\perp}$ genom ortogonalprojektion i enlighet med sats 6.3.9, sid 146. Beräkna därefter $\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}$.
Alternativ 1: Bestäm först en bas i $\mathbb{U}$ genom att lösa ekvationssystemet som definierar $\mathbb{U}$.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ \phantom{x_1 -{}} 3x_2 + 3x_3 \phantom{{}-x_4} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 + x_4 = -2s + t \\ -x_3 = -s \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\perp \mathbf{f}_1} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\| \mathbf{f}_1} =$$

$$= \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(-2) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}_2 = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = (\mathbf{v} \bullet \mathbf{f}_1)\, \mathbf{f}_1 + (\mathbf{v} \bullet \mathbf{f}_2)\, \mathbf{f}_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\-1\\7\\3\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\-1\\7\\3\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}=$$

$$= \frac{6}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{8}{4}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\5\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}=\mathbf{v}-\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\-1\\7\\3\end{pmatrix}-\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\5\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\5\\-2\end{pmatrix}\Longrightarrow \text{Avståndet}=\left|\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\5\\-2\end{pmatrix}\right|=\sqrt{34},$$

d v s $\min\limits_{\mathbf{u}\in\mathbb{U}}|\mathbf{v}-\mathbf{u}|=\sqrt{34}$ och detta minsta avstånd fås för $\mathbf{u}=\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}=(1,-2,2,5)$.

Alternativ 2: Låt $\mathbf{k}_1=(-2,-1,1,0)$, $\mathbf{k}_2=(1,0,0,1)$ och studera (det olösbara) ekvationssystemet

$$\lambda_1\mathbf{k}_1+\lambda_2\mathbf{k}_2=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2&1\\-1&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\-1\\7\\3\end{pmatrix}=\mathbf{v}.$$

Bestäm minstakvadrat-lösningen.

$$A^tA=\begin{pmatrix}-2&-1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\-1&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-2\\-2&2\end{pmatrix},$$

$$A^t\begin{pmatrix}3\\-1\\7\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-1\\7\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$$

$$A^tA\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-2\\-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}3&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}=(1,-2,2,5)=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2&1\\-1&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\5\end{pmatrix}.$$

vilket förstås är detsamma som vi fick i alternativ 1. Fortsätt sedan på samma sätt som där.

Alternativ 3: Genom att skriva ekvationerna för $\mathbb{U}$ som skalärprodukter fås att $\mathbb{U}$ kan ses som de vektorer som är ortogonala mot

$$(1,-1,1,-1) \text{ och } (1,2,4,-1), \text{ d v s } \quad \mathbb{U}^\perp = [(1,-1,1,-1),(1,2,4,-1)].$$

Fortsätt nu som i alternativ 1, d v s bestäm en ON-bas och beräkna $\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}} = \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}^\perp}$ genom projektion. Vi kan därmed beräkna avståndet direkt och sedan får vi $\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}$.

5. Kvadratkomplettera. Vi får då

$$\begin{aligned}
Q(x,y,z) &= 2x^2+4xz+4y^2+4yz+az^2 = 2(\underline{x^2+2xz})+4y^2+4yz+az^2 = \\
&= 2(\underline{(x+z)^2-z^2})+4y^2+4yz+az^2 = 2(x+z)^2+4y^2+4yz+(a-2)z^2 = \\
&= 2(x+z)^2+4(\underline{y^2+yz})+(a-2)z^2 = \\
&= 2(x+z)^2+4\underline{\left(\left(y+\frac{1}{2}z\right)^2-\frac{1}{4}z^2\right)}+(a-2)z^2 = \\
&= 2(x+z)^2+4\left(y+\frac{1}{2}z\right)^2+(a-3)z^2.
\end{aligned}$$

(a) Ur detta följer att (se, t ex sats 9.1.9, sid 226)
- Q är positivt definit om $a > 3$
- Q är positivt semidefinit om $a = 3$
- Q är indefinit om $a < 3$.

(b) Med $a = 3$ får Q matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = [\text{Utveckla efter rad 1}] =$$

$$\begin{aligned}
&= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 4-\lambda \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (2-\lambda)((4-\lambda)(3-\lambda)-4)-4(4-\lambda) = \\
&= (2-\lambda)\left(\lambda^2-7\lambda+8\right)-16+4\lambda = 2\lambda^2-14\lambda+16-\lambda^3+7\lambda^2-8\lambda-16+4\lambda = \\
&= -\lambda^3+9\lambda^2-18\lambda = -\lambda\left(\lambda^2-9\lambda+18\right) = 0 \iff
\end{aligned}$$

$$\lambda = 0, \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}-\frac{72}{4}} = \frac{9\pm 3}{2} = 3, 6.$$

Enligt sats 9.1.9, sid 226 är Q positivt semidefinit.

6. Beräkna egenvärdena på vanligt sätt.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & a \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-4-a = 0 \iff \lambda = \pm\sqrt{4+a}.$$

Följaktligen, om 1 skall vara egenvärde måste $a = -3$. Då fås attdet andra egenvärdet är -1. Beräkna egenvektorerna.

$$\underline{\underline{\lambda = 1}}: \left(\begin{array}{cc|c} -3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\lambda = -1}}: \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{-1} = t\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}T = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Om vi ser A som avbildningsmatris för en linjär avbildning så blir matrisen diagonal efter byte till bas av egenvektorer. Vi får

$$\begin{aligned}
A^n\begin{pmatrix} 1 \\ C \end{pmatrix} &= T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n T^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ C \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}T^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ C \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{2}T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ C \end{pmatrix} = \frac{1}{2}T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1-3C \\ 1+C \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{2}T\begin{pmatrix} -(1+3C) \\ (1+C)(-1)^n \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\left(-(1+3C)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (1+C)(-1)^n\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \\
&= -\frac{1+3C}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1+C}{2}(-1)^n\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Då $(-1)^n$ saknar gränsvärde då $n \to \infty$ följer det att $C = -1$ för att gränsvärde skall kunna existera. Insättning av $C = -1$ i uttrycket ovan ger

$$A^n\begin{pmatrix} 1 \\ C \end{pmatrix} = -\frac{1-3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

för alla n varur följer att även gränsvärdet är $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

7. (a) Vi börjar med att konstatera att A är en ortonormal matris eftersom kolonnvektorerna är en ON-bas, t ex är

$$\left|\underline{\mathbf{e}}\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{9}\sqrt{1+4^2+8^2} = \frac{1}{9}\sqrt{81} = 1, \quad \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 8 - 16 + 8 = 0.$$

Därmed är F isometrisk enligt sats 7.7.2, sid 191. Beräkna det A.

$$\det A = \frac{1}{9^3}\begin{vmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 4 & -4 & 7 \\ 8 & 1 & -4 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-4r_1 \\ r_3-8r_1}}{=} \frac{1}{9^3}\begin{vmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 0 & -36 & -9 \\ 0 & -63 & -36 \end{vmatrix} = \frac{(-9)^2}{9^3}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}(16-7) = 1.$$

Därmed, enligt sats 7.7.6, sid 195 är F en vridning. Då vridningsaxeln är en egenvektor med egenvärde 1 fås denna ur

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-9 & 8 & 4 & 0 \\ 4 & -4-9 & 7 & 0 \\ 8 & 1 & -4-9 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -8 & 8 & 4 & 0 \\ 4 & -13 & 7 & 0 \\ 8 & 1 & -13 & 0 \end{array}\right) \overset{-r_1/4}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & -13 & 7 & 0 \\ 8 & 1 & -13 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-4r_1}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & -9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{r_1+2r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X = t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

d v s vridningsaxeln är $(3, 2, 2)$.

(b) För att hitta vridningsvinkeln på föreskrivet sätt börjar vi med att konstatera att "lämpligt $\mathbf{u}$"är en vektor ortogonal mot vridningsaxeln, t ex $\mathbf{u} = (0, 1, -1)$. Ur figur 7.3(b), sid 177 ser vi att vridningsvinkeln då är precis vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $F(\mathbf{u})$. genom att beräkna skalärprodukten mellan $\mathbf{u}$ och $F(\mathbf{u})$ ur både koordinaterna och definitionen fås

$$F(0,1,1) = \underline{\mathbf{e}}\,\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 4 & -4 & 7 \\ 8 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 4 \\ -11 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}\bullet F(\mathbf{u}) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\bullet \frac{1}{9}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 4 \\ -11 \\ 5 \end{pmatrix} = -\frac{16}{9} =$$

$$= |\mathbf{u}| \cdot |F(\mathbf{u})| \cos\theta = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cos\theta \iff \cos\theta = -\frac{8}{9}.$$