LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Ulf Janfalk

Kurskod: TATA31
Provkod: KTR1

Kontrollskrivning i Linjär algebra 2015–10–29, 14–18.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.
På uppgift 1–14 skall ***endast svar*** ges. Varje rätt svar ger 1 poäng, fel svar 0 poäng.
Uppgift 15 och 16 ger tre poäng vardera; ***fullständiga och välmotiverade lösningar krävs.***
Minst 11 poäng tillgodoräknas som tre poäng på uppgift 1 på tentamen.
Minst 16 poäng ger ytterligare en bonuspoäng på tentamen.
Rätten att tillgodoräkna sig bonus består under läsåret 2015-2016.
Resultatet meddelas via e-post. Lösningar läggs ut efter skrivtidens slut på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Om inget annat sägs, är alla koordinater för vektorer i planet och rummet givna relativt en högerorienterad ON-bas.

1. Ange, i parameterform, lösningsmängden (kalla variablerna x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) till ekvationssystemet som i matrisform har totalmatrisen

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

2. Betrakta matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Beräkna den/de av de nedan angivna operationerna som är definierade:

$$A + B^t, \qquad BA, \qquad A^t B.$$

3. Rita ett vanligt rätvinkligt koordinatsystem (höger ON) och låt **fem rutor** svara mot **en längdenhet**. Låt $\underline{\mathbf{e}}$ vara en ON-bas där $\mathbf{e}_1$ pekar i den horisontella koordinataxelns riktning och $\mathbf{e}_2$ i den lodräta axelns riktning. Rita i detta koordinatsystem in, så exakt som möjligt, vektorerna $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, den ortogonala projektionen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$ och den ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{u}$.

4. Ange riktningsvektorn för skärningslinjen mellan planen

$$2x - y + 3z = 7 \quad \text{och} \quad -x + 3y + 2z = 12.$$

5. Låt A vara en $3{\times}3$-matris, X en $3{\times}1$-matris och $Y = \begin{pmatrix} \pi \\ e \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$. Antag $X = X_p + tX_h$ är lösning till matrisekvationen $AX = Y$ för alla $t \in \mathbb{R}$. Ange produkterna AX_p och AX_h.

6. Ange ekvationen på parameterform till planet genom punkterna $(2, 3, 1)$, $(4, -1, 2)$ och $(-1, 1, 2)$.

7. Ange ekvationen på normalform till planet som innehåller linjen
$$L\colon\ \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\,\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \quad \text{och punkten} \quad (5, 1, -2).$$

8. Vilken punkt på linjen $L\colon\ \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ ligger närmast punkten $(1, 1, 2)$?

9. Bestäm avståndet mellan punkten $(1, 2, 3)$ och planet med ekvation $2x - y + 3z = 7$?

10. Bestäm inversen till matrisen
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

11. Lös matrisekvationen $A^{-1}XB = C$ där
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Låt $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ och $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$. Skriv $\mathbf{v}$ som en summa, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ där $\mathbf{v}_1$ är parallell med och $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}_2$ är ortogonal mot $\mathbf{u}$.

13. Beräkna determinanten
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

14. Bestäm skärningspunkten mellan linjerna (om sådan finnes)
$$L_1\colon\ \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R},$$
$$L_2\colon\ \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$

(3 p) 15. Avgör för vilka värden på de reella talen a och b som ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + ay + z = b \\ 3x + ay - az = 2 \\ 3x + y - z = 1 \end{cases}$$

har entydig lösning, ingen lösning eller oändligt många lösningar. Fås oändligt många lösningar för något val av a och b skall lösningsmängden anges.

(3 p) 16. Betrakta underrummet

$$\mathbb{U} = [(1,-1,1,-1,1),(2,1,4,1,2),(1,2,3,2,1),(1,1,0,1,1),(1,0,-3,0,1)] \subset \mathbb{R}^5.$$

Beskriv $\mathbb{U}$ med så få vektorer som möjligt samt som lösningsmängd till ett ekvationssystem, d v s som ett så kallat *lösningsrum*.

Lösningsförslag till TATA31. Linjär algebra, 2015–10–29

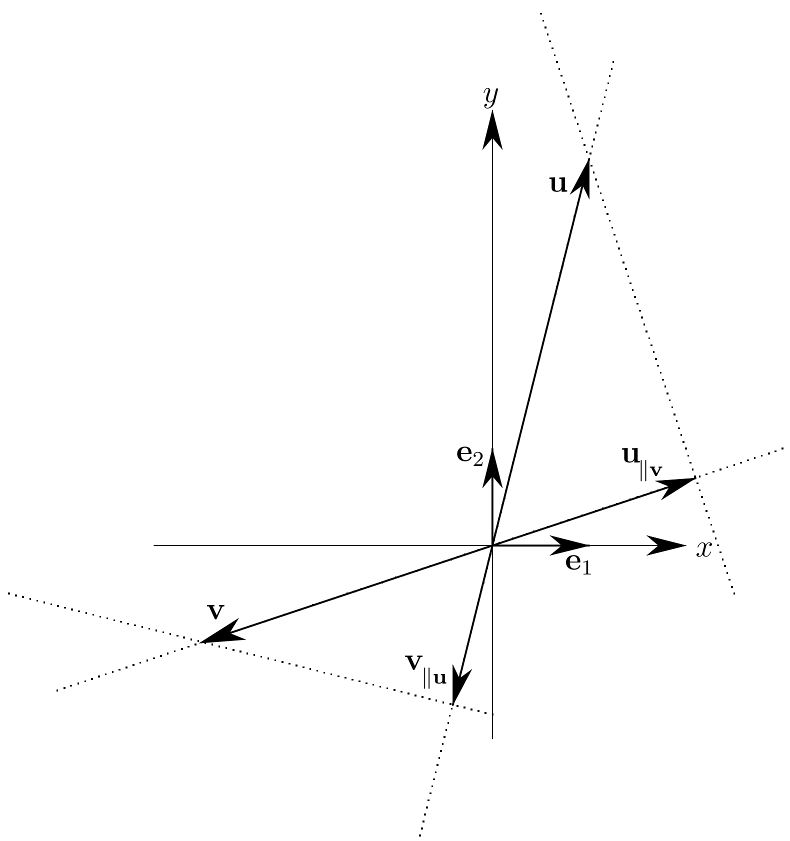
1. $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Den enda som inte är definierad är $A^t B$

$$A + B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \\ 8 & 8 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 14 \end{pmatrix}.$$

3.



4. $\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$

5. $AX_p = \begin{pmatrix} \pi \\ e \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $AX_h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

6. Π: $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$

7. $3x - 11y + 2z = 0$

8. $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$

9. $\frac{1}{7}\sqrt{14} = \sqrt{\frac{2}{7}}$

10. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

12. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{\|\mathbf{u}} = \frac{1}{6}\mathbf{u} = \frac{1}{6}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{6}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}$

13. -7

14. $(4, -1, 1)$

15. Skriv på matrisform och beräkna nollställena till determinanten av koefficientmatrisen. Vi får

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & b \\ 3 & a & -a & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right), \quad \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 3 & a & -a \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-3r_1 \\ r_3-3r_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & -2a & -3-a \\ 0 & 1-3a & -4 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{utv. efter} \\ \text{kolonn 1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -2a & -3-a \\ 1-3a & -4 \end{vmatrix} = 8a - (1-3a)(-3-a) = 8a - (-3+8a+3a^2) =$$

$$= 3 - 3a^2 = 0 \iff a = \pm 1.$$

Determinantkriteriet (Korollarium 4.7.2, sid 93) ger då att systemet har entydig lösning för alla $a \neq \pm 1$ oavsett värde på b. Vad som gäller för $a = \pm 1$ kontrolleras separat.

$\underline{\underline{a = 1}}$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3-r_2 \\ r_2-3r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & -2 & -4 & -3b+2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$

Av ovanstående framgår att systemet är olösbart oavsett värde på b då $a = 1$.

$\underline{\underline{a = -1}}$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & b \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-3r_1 \\ r_3-3r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & b \\ 0 & 2 & -2 & -3b+2 \\ 0 & 4 & -4 & -3b+1 \end{array}\right) \overset{r_3-2r_2}{\sim}$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & b \\ 0 & 2 & -2 & -3b+2 \\ 0 & 0 & 0 & -3+3b \end{array}\right)$$

Av ovanstående framgår att systemet är olösbart då $a = -1$ och $b \neq 1$. Om $a = -1$ och $b = 1$ fås

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+y-z = 1-1/2+t-t = 1/2 \\ (-1+2z)/2 = -1/2+t \\ t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Sammanfattningsvis fås alltså:

(a) entydig lösning för alla $b \in \mathbb{R}$ om $a \neq \pm 1$,

(b) ingen lösning om $a = 1$, $b \in \mathbb{R}$ eller $a = -1$, $b \neq 1$,

(c) oändligt många lösningar, med lösningsmängden i (1), då $a = -1$ och $b = 1$.

16. Kalla de genererande vektorerna $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_5$ och ställ upp beroendeekvationen samt linjärkombiation = godtycklig vektor, dvs

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3 + \lambda_4\mathbf{u}_4 + \lambda_5\mathbf{u}_5 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}$$

$$\lambda_1 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_5 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \ldots =$$

$$= \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

och lös ovanstående ekvationsssytem på vanligt sätt. Vi får

$$\left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & x_1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & -3 & 0 & x_3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & x_4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & x_5 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+r_1 \\ r_3-r_1 \\ r_4+r_1 \\ r_5-r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & x_1+x_2 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -4 & 0 & -x_1+x_3 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & x_1+x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1+x_5 \end{array}\right) \overset{\substack{3r_3-2r_2 \\ r_4-r_2}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & x_1+x_2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -14 & 0 & -5x_1-2x_2+3x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2+x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1+x_5 \end{array}\right). \tag{2}$$

Vi börjar med beroendeekvationen och skriver ut den som ekvationssystem.

$$
\begin{cases}
\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 0 \\
3\lambda_2 + 3\lambda_3 + 2\lambda_4 + \lambda_5 = 0 \\
- 7\lambda_4 - 14\lambda_5 = 0
\end{cases}
\Longrightarrow
$$

$$
\Longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 - \lambda_5 = 2s - 2t - s + 2t - t = s - t \\ (-3\lambda_3 - 2\lambda_4 - \lambda_5)/3 = (-3s + 3t)/3 = -s + t \\ s \\ -2\lambda_5 = -2t \\ t \end{pmatrix} =
$$

$$
= s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.
$$

För att se vilka vi kan utse till löjliga element väljer vi ut två av lösningarna, nämligen de vi får för $s = 1, t = 0$ respektive $s = 0, t = 1$. Insättning av dessa i beroendeekvationen ger

$$
\underline{\underline{s = 1, t = 0}} : \quad \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \iff \mathbf{u}_3 = -\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2
$$

$$
\underline{\underline{s = 0, t = 1}} : \quad -\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_4 + \mathbf{u}_5 = \mathbf{0} \iff \mathbf{u}_5 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_4,
$$

d v s $\mathbf{u}_3$ och $\mathbf{u}_5$ kan utses till löjliga element. Satsen om löjliga element (Sats 5.3.16, sid 111) ger då att

$$
\mathbb{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cancel{\mathbf{u}_3}, \mathbf{u}_4, \cancel{\mathbf{u}_5}] = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4].
$$

Återstår att skriva $\mathbb{U}$ som lösningsrum. Från (2) med godtyckliga vektorn i högerledet ser vi att systemet är lösbart omm

$$
-x_2 + x_4 = 0 \quad \text{och} \quad -x_1 + x_5 = 0
$$

vilket innebär att en given vektor är en linjärkombination av de givna, d v s är ett element i $\mathbb{U}$ omm dess koordinater uppfyller $-x_2 + x_4 = 0$ och $-x_1 + x_5 = 0$. Följaktligen är

$$
\mathbb{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4] = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \colon -x_2 + x_4 = 0 \quad \text{och} \quad -x_1 + x_5 = 0 \right\}.
$$