Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ulf Janfalk

Kurskod: TATA31
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA31/TEN1) 2015–08–22, 14–19.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.
För godkänt räcker 9 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ($\geq$ 11p) ht2014 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas) och 16p eller mer ger 4 poäng på uppgift 1. Markera detta genom att skriva ”G” respektive ”G+1” i rutan för uppgift 1.
Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar läggs ut efter skrivtidens slut på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Resultat meddelas via e-post inom 10 arbetsdagar.
Alla koordinater för vektorer och punkter är, om ej annat anges, givna med avseende på ett positivt orienterat ON-system, $\mathbb{R}^n$ är ett euklidiskt rum med standardskalärprodukten och standardbasen ett positivt orienterat ON-system.

(2 p) 1. (a) Låt $P = (1, 2, 3)$ och låt L vara skärningslinjen mellan planen

$$2x + 5y + 9z = -1 \quad \text{och} \quad x + 2y + 4z = 0.$$

Bestäm avståndet mellan P och L.

(1 p) (b) Beräkna determinanten av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -4 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2 p) 2. (a) Låt $A = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$. För varje positivt heltal n, ange en formel för att beräkna A^n som en funktion av n.

(1 p) (b) Visa att din formel är korrekt för $n = 1$ och $n = 2$.

(3 p) 3. Låt

$$\mathbb{U} = \left[1 + 2x + 3x^2 + 4x^3,\ 1 + x + 4x^2 + 2x^3,\ 3 + 4x + 11x^2 + 8x^3\right] \subset \mathbb{P}_3.$$

Bestäm en bas i $\mathbb{U}$ och fyll ut den till en bas i $\mathbb{P}_3$. Ange koordinaterna för $1 + x^2$ i den bas du valt.
OBS! Polynomen du fyller ut med skall i *svaret* vara skrivna som polynom, inte i koordinatform!

VÄND!!

(2 p) 4. (a) Den linjära avbildningen $F\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ avbildar varje vektor i $\mathbb{R}^3$ på sin spegelbild i planet $x-y+2z=0$. Bestäm F:s matris i standardbasen.

(1 p) (b) Verifiera att din matris är korrekt genom att använda den till att beräkna $F(\mathbf{n})$ respektive $F(\mathbf{v})$ där $\mathbf{n}$ är normalen till planet och $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ är en vektor i planet.

(3 p) 5. Låt $\mathbf{v}=(1,1,-9,-1)$ och

$$\mathbb{U}=[(1,2,0,3),(4,0,5,8),(5,2,5,11)]\subset\mathbb{R}^4.$$

Bestäm $\mathbf{v}_1\in\mathbb{U}$ och $\mathbf{v}_2\in\mathbb{U}^\perp$ så att $\mathbf{v}=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$. Ange också avståndet mellan $\mathbf{v}$ och $\mathbb{U}^\perp$.

6. Låt $\mathbf{u}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ och

$$Q(\mathbf{u})=3x_1^2+x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3.$$

(1 p) (a) Bestäm det största respektive minsta värde $Q(\mathbf{u})$ kan anta då $|\mathbf{u}|=3$.

(2 p) (b) Bestäm minsta avståndet från ytan $Q(\mathbf{u})=-3$ till origo samt i vilka punkter detta minsta avstånd antas.

7. Gäller påståendena nedan? Bevisa eller motbevisa.

(1 p) (a) Vektorn$(2,1,2)$ är en egenvektor till avbildningen $F\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ som har matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

i standardbasen.

(1 p) (b) Om $\mathbf{u}$ är en egenvektor till den linjära avbildningen $F\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ så är $\mathbf{u}$ en egenvektor också till $F\circ F$. [**Definition**: $F\circ F(\mathbf{u})=F(F(\mathbf{u}))$.]

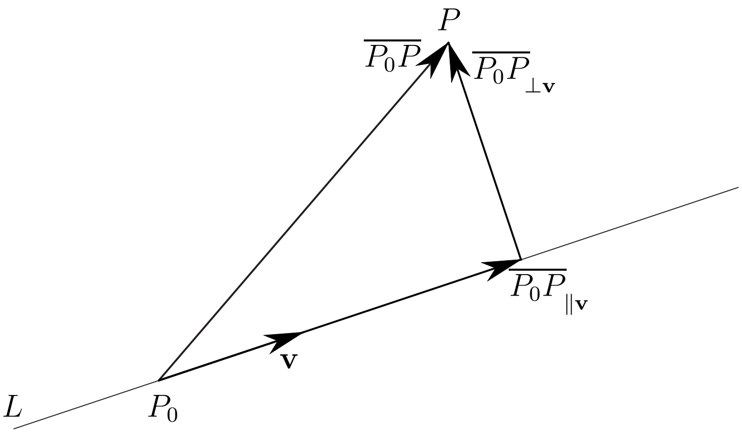
(1 p) (c) Funktionerna $e^x+e^{-x},\ e^x-e^{-x},\ e^x+2e^{-x}$ är linjärt beroende.

Lösningsförslag till TATA31, Linjär algebra, 2015–08–22

1. (a) Tag först fram parameterformen för skärningslinjen genom att lösa ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 9 & -1 \end{array}\right) \overset{r_2-2r_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{r_1-2r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow L\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2t \\ -1+t \\ -t \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$



Välj $P_0 = (2, -1, 0)$. Vi får

$$\overline{P_0P} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overline{P_0P}_{\parallel\mathbf{v}} = \frac{\overline{P_0P}\bullet\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} = \frac{1}{6}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \overline{P_0P}_{\perp\mathbf{v}} = \overline{P_0P} - \overline{P_0P}_{\parallel\mathbf{v}} = \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \text{Sökt avstånd} = \left|\overline{P_0P}_{\perp\mathbf{v}}\right| = \left|\frac{1}{3}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}\right| = \frac{\sqrt{165}}{3}.$$

(b) Börja med att ordna 0:or i kolonn 1

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -4 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2+r_1 \\ r_3-r_1 \\ r_4+2r_1}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 4\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 8(-13) = -104.$$

2. (a) Låt $A = A_{\underline{\mathbf{e}}}$ vara matris i standardbasen till en linjär avbildning $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ och beräkna egenvärdena.

$$\det\left(A_{\underline{\mathbf{e}}} - \lambda I\right) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 8 \\ -4 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(-5-\lambda) + 32 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 =$$

$$= (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0 \iff \lambda = 3, -1.$$

Beräkna egenvektorerna till F och byt till en bas av egenvektorer.

$$\underline{\underline{\lambda = -1}}: \left(\begin{array}{cc|c} 8 & 8 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{-1} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 3}}: \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 8 & 0 \\ -4 & -8 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{3} = t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}\,T = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \ T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ A_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A_{\underline{\mathbf{f}}}^n = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

Basbytesformeln (sats 7.4.1, sid 178) och sats 7.6.2, sid 186 ger då

$$A_{\underline{\mathbf{e}}}^n = TA_{\underline{\mathbf{f}}}^n T^{-1} = T\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & 2(-1)^{n+1} \\ 3^n & 3^n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} + 2\cdot 3^n & 2(-1)^{n+1} + 2\cdot 3^n \\ (-1)^n - 3^n & 2(-1)^n - 3^n \end{pmatrix} = A^n$$

(b) $n=1$ ger

$$\begin{pmatrix} (-1)^{1+1} + 2\cdot 3^1 & 2(-1)^{1+1} + 2\cdot 3^1 \\ (-1)^1 - 3^1 & 2(-1)^1 - 3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 2+6 \\ -1-3 & -2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} = A^1 = A.$$

$n=2$ ger

$$\begin{pmatrix} (-1)^3 + 2\cdot 3^2 & 2(-1)^3 + 2\cdot 3^2 \\ (-1)^2 - 3^2 & 2(-1)^2 - 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+18 & -2+18 \\ 1-9 & 2-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 16 \\ -8 & -7 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49-32 & 56-40 \\ -28+20 & -32+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 16 \\ -8 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{VSV}$$

3. Sätt $\mathbf{p}_1 = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$, $\mathbf{p}_2 = 1 + x + 4x^2 + 2x^3$, $\mathbf{p}_3 = 3 + 4x + 11x^2 + 8x^3$ och ställ upp beroendeekvationen och linjärkombination = godtyckligt polynom. Med $\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{pmatrix}$ fås

$$\lambda_1\left(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3\right) + \lambda_2\left(1 + x + 4x^2 + 2x^3\right) + \lambda_3\left(3 + 4x + 11x^2 + 8x^3\right) =$$

$$\lambda_1\underline{\mathbf{x}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2\underline{\mathbf{x}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3\underline{\mathbf{x}}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} = \mathbf{0}, a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = \underline{\mathbf{x}}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 3 & 0 & a_0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & a_1 \\ 3 & 4 & 11 & 0 & a_2 \\ 4 & 2 & 8 & 0 & a_3 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-3r_1 \\ r_4-4r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 3 & 0 & a_0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -2a_0+a_1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3a_0+a_2 \\ 0 & -2 & -4 & 0 & -4a_0+a_3 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3+r_2 \\ r_4-2r_2}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 3 & 0 & a_0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -2a_0+a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5a_0+a_1+a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2a_1+a_3 \end{array}\right).$$

Börja med att lösa beroendeekvationen.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow -\mathbf{p}_1 - 2\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = \mathbf{0} \iff \mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_1 + 2\mathbf{p}_2,$$

d v s $\mathbf{p}_3$ kan utses till löjligt element och enligt satsen om löjliga element (Sats 5.3.16, sid 111) kan $\mathbf{p}_3$ strykas utan att höljet ändras. Om vi nu gör om ovanstående kalkyl utan $\mathbf{p}_3$ ser vi att $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ är linjärt obereoende och därmed en bas för $\mathbb{U}$. Kalkylen "linjärkombination = godtyckligt polynom" ger då att

$$\mathbb{U} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2] = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{P}_3\colon \begin{array}{c} -5a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ -2a_1 + a_3 = 0 \end{array} \right\}.$$

Som utfyllnad väljer vi nu ett polynom $\mathbf{q}_3$ som bryter mot det första villkoret $-5a_0 + a_1 + a_2 = 0$, men uppfyller det andra. Vi kan, t ex välja $\mathbf{q}_3 = 1 + 0{\cdot}x + x^2 + 0{\cdot}x^3 = 1 + x^2$ $(-5 + 0 + 1 = -4 \neq 0$ och $-2{\cdot}0 + 0 = 0)$. Plus-satsen (Sats 5.4.21, sid 123) ger då att $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_3$ är linjärt oberoende och då alla tre uppfyller att $-2a_1 + a_3 = 0$ fås att

$$[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_3] = \{\mathbf{p} \in \mathbb{P}_3\colon -2a_1 + a_3 = 0\}.$$

Som utfyllnad väljer vi ett polynom som bryter mot det definierande villkoret, t ex $\mathbf{q}_4 = x$. Plus-satsen igen, ger att $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4$ är linjärt oberoende. Då $\dim \mathbb{P}_3 = 4$ är de också rätt antal, d v s de är en bas i $\mathbb{P}_3$ enligt satsen om rätt antal element (Sats 5.4.19, sid 121). Sätt $\underline{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{q}_3 = 1 + x^2 & \mathbf{q}_4 \end{pmatrix}$. Då polynomet vars koordinater i nya basen skall bestämmas, $1 + x^2$, också är en den tredje basvektorn följer det att

$$1 + x^2 = 0{\cdot}\mathbf{p}_1 + 0{\cdot}\mathbf{p}_2 + 1{\cdot}\mathbf{q}_3 + 0{\cdot}\mathbf{q}_4 = \underline{\mathbf{q}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d v s dess koordinater blir $(0, 0, 1, 0)$.

4. (a) Sätt $\mathbf{n} = (1, -1, 2)$ och beräkna $F(\mathbf{e}_1)$, $F(\mathbf{e}_2)$, $F(\mathbf{e}_3)$.

$$F(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_{1_{\|\mathbf{n}}} = \mathbf{e}_1 - \frac{2}{6} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$F(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_{2_{\|\mathbf{n}}} = \mathbf{e}_2 - \frac{2}{6}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},$$

$$F(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_{3_{\|\mathbf{n}}} = \mathbf{e}_3 - \frac{2}{6}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A_{\underline{\mathbf{e}}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\1 & 2 & 2\\-2 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

(b) Då F är en spegling vet vi att $F(\mathbf{n}) = -\mathbf{n}$ och att $F(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ för alla $\mathbf{v}$ i planet. Med $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$ fås

$$F(\mathbf{v}) = F(1,1,0) = \underline{\mathbf{e}}\,\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\1 & 2 & 2\\-2 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \mathbf{v}$$

$$F(\mathbf{n}) = F(1,-1,2) = \underline{\mathbf{e}}\,\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\1 & 2 & 2\\-2 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3\\3\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix} = -\mathbf{n}.$$

Skall man vara 100% säker på att man räknat rätt måste man beräkna $F(\mathbf{u})$ för ytterligare en vektor $\mathbf{u}$ sådan att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är linjärt oberoende, t ex $\mathbf{u} = (2, 0, -1)$. Vi avstår från det och överlåter den kontrollen åt läsaren.

5. Vi börjar med att observera att

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\\3\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\0\\5\\8\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}5\\2\\5\\11\end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbb{U} = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\\3\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\0\\5\\8\end{pmatrix}\right]$$

enligt satsen om löljliga element. Den sökta uppdelningen är en vanlig ortogonaluppdelning, d v s

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} \quad \text{och} \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}.$$

Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$.

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\\3\end{pmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\0\\5\\8\end{pmatrix}_{\perp\mathbf{f}_1} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\0\\5\\8\end{pmatrix} - \frac{1}{14}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\0\\5\\8\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\\3\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\\3\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\0\\5\\8\end{pmatrix} - 2\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\\3\end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-4\\5\\2\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{49}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-4\\5\\2\end{pmatrix}.$$

Med ovanstående ON-bas fås

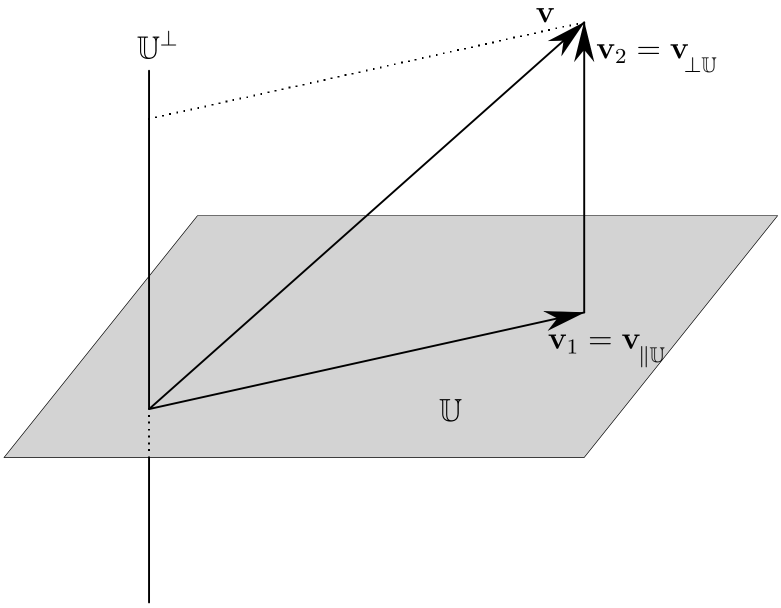
$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = (\mathbf{v}\bullet\mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 + (\mathbf{v}\bullet\mathbf{f}_2)\,\mathbf{f}_2 =$$

$$= \frac{1}{7}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\-9\\-1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\\3\end{pmatrix}\right) + \frac{1}{49}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\-9\\-1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-4\\5\\2\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-4\\5\\2\end{pmatrix} =$$

$$= -\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-4\\5\\2\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\4\\-5\\-2\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\-9\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\4\\-5\\-2\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\-3\\-4\\1\end{pmatrix}.$$

För att bestämma avståndet kan nedanstående figur underlätta.



Vi ser då att avståndet mellan $\mathbf{v}$ och $\mathbb{U}^\perp$ är

$$|\mathbf{v}_1| = \left|\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}\right| = \left|\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\4\\-5\\-2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-2)^2+4^2+(-5)^2+(-2)^2} = \sqrt{49} = 7$$

vilket också följer ur Sats 6.3.15, sid 150 eftersom

$$\min_{\mathbf{u}\in\mathbb{U}^\perp} |\mathbf{v}-\mathbf{u}| = \left|\mathbf{v}-\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}^\perp}\right| = \left[\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}^\perp} = \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}\right] = \left|\mathbf{v}-\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}\right| = \left|\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}\right|.$$

6. Skriv Q på matrisform och beräkna egenvärdena.

$$\begin{aligned}
Q(\mathbf{u}) &= 3x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 = \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = X^tAX \\
\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{r_3-r_1}{=} \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ \lambda-3 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{k_1+k_3}{=} \\
&= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -4 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (3-\lambda)((3-\lambda)(1-\lambda)-8) = (3-\lambda)\left(\lambda^2-4\lambda-5\right) = \\
&= (3-\lambda)(\lambda-5)(\lambda+1) = 0 \iff \lambda = 5, 3, -1.
\end{aligned}$$

(a) Enligt Sats 9.1.11, sid 227 gäller att

$$\lambda_{\min}|\mathbf{u}|^2 \leq Q(\mathbf{u}) \leq \lambda_{\max}|\mathbf{u}|^2$$

med likhet då $\mathbf{u}$ är en egenvektor till respektive egenvärde. I vårt fall är $\lambda_{\min} = -1$, $\lambda_{\max} = 5$ och $|\mathbf{u}| = 3$ så min-värdet blir $-1{\cdot}3^2 = -9$ och max-värdet $5{\cdot}3^2 = 45$.

(b) Sats 9.1.11, sid 227 ger i denna nya situation att

$$-|\mathbf{u}|^2 \leq Q(\mathbf{u}) = -3 \leq 9\,|\mathbf{u}|^2 .$$

I detta fall blir den högra olikheten trivial ($9\,|\mathbf{u}|^2 \geq 0 > -3$ är ju sant för alla $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$) och den vänstra ger

$$-|\mathbf{u}|^2 \leq -3 \iff |\mathbf{u}|^2 \geq 3 \iff |\mathbf{u}| \geq \sqrt{3},$$

med likhet då $\mathbf{u}$ är en egenvektor till -1, d v s om $Q(\mathbf{u}) = -3$ och $\mathbf{u}$ är en egenvektor till $\lambda_{\min} = -1$ så är $|\mathbf{u}| = \sqrt{3}$. Beräkna egenvektorerna till $\lambda = -1$.

$$(A-(-1)I)X = 0 \iff \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_1+2r_2 \\ -r_2/2 \\ r_1 \leftrightarrow r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3+r_2 \\ r_2/2}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{-1} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Låt

$$\hat{\mathbf{u}}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d v s en egenvektor av längd 1 till egenvärdet -1. Punkterna närmast origo, på avstånd $\sqrt{3}$ är alltså de som har $\pm\sqrt{3}\hat{\mathbf{u}}_{-1}$ som ortsvektor, dvs

$$P = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}(1,2,1) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1,2,1)$$

är de punkter på ytan som ligger närmast origo.

7. (a) Falskt, ty

$$F(2,1,2) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

för alla $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Sant. Om $F(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}$ så gäller att

$$F \circ F(\mathbf{u}) = F(F(\mathbf{u})) = F(\lambda \mathbf{u}) = \lambda F(\mathbf{u}) = \lambda(\lambda \mathbf{u}) = \lambda^2 \mathbf{u},$$

d v s $\mathbf{u}$ är en egenvektor till $F \circ F$ (med egenvärde λ^2).

(c) Sant. Ställ upp beroendeekvationen.

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \left(e^x + e^{-x}\right) + \lambda_2 \left(e^x - e^{-x}\right) + \lambda_3 \left(e^x + 2e^{-x}\right) = \\ &\qquad = e^x(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + e^{-x}(\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \iff \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \overset{ekv2-ekv1}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \quad - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Då ekvationssystemet har oändligt många lösningar är $e^x + e^{-x}$, $e^x - e^{-x}$, $e^x + 2e^{-x}$ linjärt beroende.