Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ulf Janfalk

**Kurskod: TATA31**
**Provkod: TEN1**

# Tentamen i Linjär algebra (TATA31/TEN1) 2015–04–07, 8–13.

**Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.**
För godkänt räcker 9 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ($\geq$ 11p) ht2014 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas) och 16p eller mer ger 4 poäng på uppgift 1. Markera detta genom att skriva ”G” respektive ”G+1” i rutan för uppgift 1.
**Fullständiga motiveringar krävs.** Lösningar läggs ut efter skrivtidens slut på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Resultat meddelas via e-post inom 10 arbetsdagar.
**Alla koordinater för vektorer och punkter är, om ej annat anges, givna med avseende på ett positivt orienterat ON-system, $\mathbb{R}^n$ är ett euklidiskt rum med standardskalärprodukten och standardbasen ett positivt orienterat ON-system.**

(1 p) 1. (a) Linjen $L$ går genom punkten $(1, -1, 2)$ och har riktningsvektorn $3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$. Planet $\Pi$ har ekvationen $2x - y + 3z = -5$. Bestäm skärningspunkten mellan $L$ och $\Pi$.

(1 p) (b) Beräkna $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 7 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(1 p) (c) Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Bestäm ***alla*** matriser $B$ sådana att $AB = BA$.

(2 p) 2. (a) Bestäm $a, b \in \mathbb{R}$ så att vektorn $\mathbf{u} = (2, 1, 1)$ blir en egenvektor till den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som i standardbasen har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -11 & a & 19 \\ -10 & b & 17 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

För dessa värden på $a$ och $b$, ange egenvärdet till $(2, 1, 1)$ samt övriga egenvärden och egenvektorer till $F$.

(1 p) (b) Verifiera direkt med definitionen av egenvärde och egenvektor att de egenvektorer du räknar fram i (a) faktiskt är egenvektorer med det egenvärde du påstår.

**VÄND!**

(3 p) 3. En parallellepiped har ett hörn i origo och de tre hörn som förbinds med origo av en kantvektor är

$$(6,-6,2), \quad (-5,8,-3) \quad \text{och} \quad (1,-2,1).$$

Avgör om punkten $\left(1,-1,\dfrac{1}{2}\right)$ ligger i eller utanför epipeden.

4. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definieras av

$$F(1,0,1)=(1,2,3), \quad F(1,1,1)=(2,1,0), \quad F(0,1,1)=(1,-1,1).$$

(2 p) (a) Bestäm $F$:s avbildningsmatris i standardbasen.

(1 p) (b) Bevisa att du har rätt genom att använda din nyss beräknade avbildningsmatris till att räkna ut de ovan givna värdena för $F$.

(3 p) 5. Låt $\mathbf{v} = (-1,2,3,4,-3) \in \mathbb{R}^5$ och låt

$$\mathbb{U} = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\3\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\4\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}5\\7\\2\\1\\-1\end{pmatrix}\right].$$

Bestäm $\min\limits_{\mathbf{u}\in\mathbb{U}} |\mathbf{v}-\mathbf{u}|$ samt vilket $\mathbf{u} \in \mathbb{U}$ som ger detta minsta avstånd.

(3 p) 6. Betrakta den kvadratiska formen $Q\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ som ges av

$$Q(\mathbf{u}) = Q(x_1,x_2,x_3,x_4) = 2x_1^2 - 4x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_4^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_4 - 8x_2x_4.$$

Bestäm $Q$:s största respektive minsta värde då $|\mathbf{u}| = 3$ samt i vilka punkter dessa antas. Ange också $Q$:s teckenkaraktär.

7. Låt $\mathbb{U} = [\sin x, \cos x, e^{2x}, e^{-x}]$. Betrakta avbildningen $F\colon \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ definierad genom

$$F(y(x)) = y''(x) + y(x),$$

där $y''(x)$ betyder 2:a-derivatan av funktionen $y(x)$.

(1 p) (a) Visa utgående från ***definitionen*** av linjär avbildning att $F$ är linjär.

(2 p) (b) $\sin x, \cos x, e^{2x}, e^{-x}$ är en bas i $\mathbb{U}$ (behöver ej visas). Bestäm $F$:s matris i denna bas och ange baser i $N(F)$ respektive $V(F)$ samt dimensionen av dessa.

## Lösningsförslag till TATA31, Linjär algebra, 2015–04–07

1. (a) Skriv $L$ på parameterform och sätt in denna i planets ekvation. Vi får då

$$L\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}$$

$L$ insatt i $\Pi: 2(1+3t)-(-1+2t)+3(2+t)=9+7t=-5 \iff t=-2 \implies$

$$\overline{OP}_s=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+(-2)\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-5\\-5\\0\end{pmatrix},$$

d v s $P_s=(-5,-5,0)$.

(b) Vi börjar med att kofaktorutveckla efter kolonn 2

$$\begin{vmatrix}1&0&0&-2\\2&3&7&-3\\3&0&0&1\\4&0&1&1\end{vmatrix}=3(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&0&-2\\3&0&1\\4&1&1\end{vmatrix}=\Big[\text{kolonn 2 igen}\Big]=3(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&-2\\3&1\end{vmatrix}=$$
$$=-3(1-(-2)\cdot 3)=-21$$

(c) Ansätt $B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ och lös ekvationssystemet $AB-BA=0$.

$$AB=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2c&b+2d\\2a+3c&2b+3d\end{pmatrix},$$
$$BA=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2b&2a+3b\\c+2d&2c+3d\end{pmatrix}$$
$$AB-BA=\begin{pmatrix}-2b+2c&-2a-2b+2d\\2a+2c-2d&2b-2c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\iff$$
$$\iff\begin{cases}b=c\\a+b-d=0\\a+c-d=0\end{cases}\iff\begin{cases}b=c\\a+b-d=0\end{cases}\begin{cases}a=-s+t\\b=s\\c=s\\d=t\end{cases}\implies$$
$$\implies B=\begin{pmatrix}-s+t&s\\s&t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad s,t\in\mathbb{R}.$$

2. Definitionen av egenvärde/egenvektor säger att $F(\mathbf{u})=\lambda\mathbf{u}$.

(a) Beräkna $F(\mathbf{u})$ med hjälp av avbildningsmatrisen. Vi får

$$F(\mathbf{u})=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-11&a&19\\-10&b&17\\-4&2&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-3\\b-3\\1\end{pmatrix}=\lambda\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\iff$$

$$\iff \begin{cases} a-3=2\lambda \\ b-3=\lambda \\ \lambda=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=5 \\ b=4 \\ \lambda=1 \end{cases} \Longrightarrow A=\begin{pmatrix} -11 & 5 & 19 \\ -10 & 4 & 17 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} -11-\lambda & 5 & 19 \\ -10 & 4-\lambda & 17 \\ -4 & 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} \overset{k_1+2k_2}{=} \begin{vmatrix} -1-\lambda & 5 & 19 \\ -2-2\lambda & 4-\lambda & 17 \\ 0 & 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} \overset{r_2-2r_1}{=}$$

$$= (-1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 5 & 19 \\ 0 & -6-\lambda & -21 \\ 0 & 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\begin{vmatrix} -6-\lambda & -21 \\ 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1-\lambda)((\lambda+6)(\lambda-7)-42) = (-1-\lambda)(\lambda^2-\lambda)=0 \iff$$

$$\iff \lambda = 0, \pm 1$$

$$\underline{\underline{\lambda=0}}: \left(\begin{array}{ccc|c} -11 & 5 & 19 & 0 \\ -10 & 4 & 17 & 0 \\ -4 & 2 & 7 & 0 \end{array}\right) \overset{r_1-r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ -10 & 4 & 17 & 0 \\ -4 & 2 & 7 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-10r_1 \\ r_3-4r_1}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-3r_3 \\ -r_3\leftrightarrow r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_0 = t\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\lambda=-1}}: \left(\begin{array}{ccc|c} -10 & 5 & 19 & 0 \\ -10 & 5 & 17 & 0 \\ -4 & 2 & 8 & 0 \end{array}\right) \overset{-\frac{1}{2}r_3\leftrightarrow r_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -4 & 0 \\ -10 & 5 & 17 & 0 \\ -10 & 5 & 19 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+5r_1 \\ r_3+5r_1}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-3r_3 \\ -r_3\leftrightarrow r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{-1}=t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$$

(b) Kontrollberäkning av egenvektorerna via avbildningsmatrisen ger

$$\underline{\underline{\lambda=0}}: F(3,-1,2) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -11 & 5 & 19 \\ -10 & 4 & 17 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\underline{\underline{\lambda=-1}}: F(1,2,0) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -11 & 5 & 19 \\ -10 & 4 & 17 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1)\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

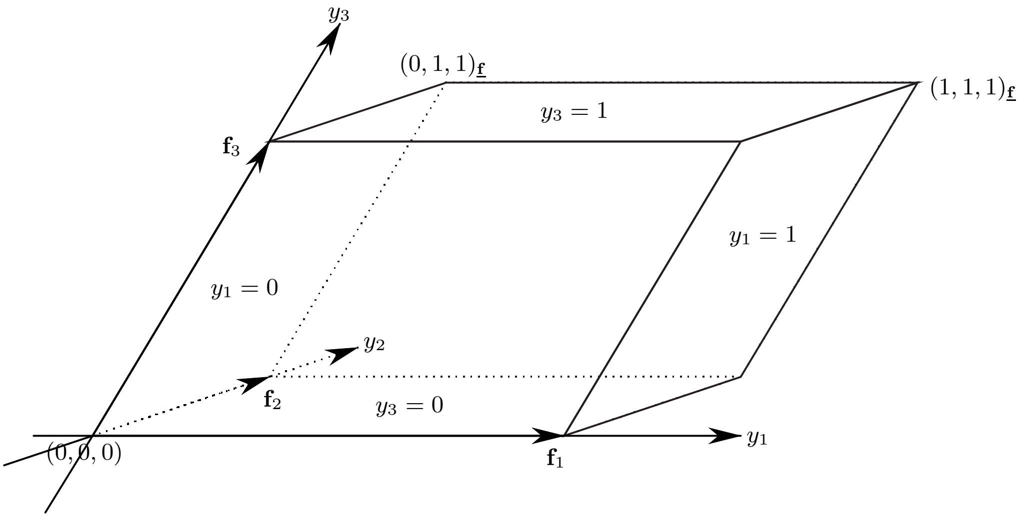
d v s de framräknade vektorerna är korrekta.

3. Byt bas och välj kantvektorerna som nya basvektorer, d v s

$$\mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}_3 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

I basen $\underline{\mathbf{f}}$ blir nu epipedens begränsningsplan parallella med koordinatplanen och hörnens koordinater består enbart av 0:or och 1:or. Eftersom ett ekvationen för, t ex

$y_1y_2$-planet är $y_3 = 0$ följer det att ekvationerna för begränsningsplanen blir $y_1 = 0$ respektive 1, $y_2 = 0$ respektive 1 och $y_3 = 0$ respektive 1.




Detta gör att punkten $P = \left(1, -1, \dfrac{1}{2}\right)$ ligger i epipeden om dess koordinater i nya basen ligger mellan 0 och 1. Vi beräknar därför först $T^{-1}$ och sedan de nya koordinaterna för $P$.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 6 & -5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 8 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{r_1-3r_3 \\ r_2+3r_3 \\ r_3\leftrightarrow r_1 \\ r_2\leftrightarrow r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3+4r_3 \\ -2r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 4 & -6 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 9 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{\substack{r_1-r_3 \\ r_2+r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 4 & -6 & 0 & -1 & -4 & -7 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 9 \end{array}\right) \overset{\substack{r_1+3r_2 \\ \frac{1}{2}r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 9 \end{array}\right) \iff$$

$$\iff T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \overline{OP} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{f}}\,\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Då de tre koordinaterna alla ligger strikt mellan 0 och 1 följer det att $P$ ligger i epipeden.

4. (a) Bestäm $F(\mathbf{e}_1),\ F(\mathbf{e}_2),\ F(\mathbf{e}_3)$. Ur de givna förutsättningarna

$$F(1,0,1){=}(1,2,3), \quad F(1,1,1){=}(2,1,0), \quad F(0,1,1){=}(1,-1,1).$$

ser vi

$$\begin{aligned} F(\mathbf{e}_1) &= F(1,0,0) = F(1,1,1) - F(0,1,1) = (2,1,0) - (1,-1,1) = (1,2,-1) \\ F(\mathbf{e}_2) &= F(0,1,0) = F(1,1,1) - F(1,0,1) = (2,1,0) - (1,2,3) \quad = (1,-1,-3) \\ F(\mathbf{e}_3) &= F(0,0,1) = F(1,0,1) - F(\mathbf{e}_1) \qquad = (1,2,3) - (1,2,-1) = (0,0,4) \end{aligned}\ .$$

Skriver vi ovanstående på "bas·koordinatform" fås

$$F(\mathbf{e}_1)=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\ F(\mathbf{e}_2)=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix},\ F(\mathbf{e}_3)=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}\iff A_{\underline{\mathbf{e}}}=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&-1&0\\-1&-3&4\end{pmatrix}$$

(b) Kontrollräkning ger

$$F(1,0,1)=F\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1&1&0\\2&-1&0\\-1&-3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=(1,2,3),$$

$$F(1,1,1)=F\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1&1&0\\2&-1&0\\-1&-3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=(2,1,0),$$

$$F(0,1,1)=F\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1&1&0\\2&-1&0\\-1&-3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=(1,-1,1)$$

vilket visar att beräkningarna i (a) är korrekta.

5. Vi börjar med att rensa bort löjliga element i beskrivningen av $\mathbb{U}$. Ställ därför, på vanligt sätt, upp beroendeekvationen och "linjärkombination=godtycklig vektor".

$$\lambda_1\mathbf{u}_1+\lambda_2\mathbf{u}_2+\lambda_3\mathbf{u}_3+\lambda_4\mathbf{u}_4=0,\mathbf{x}\quad \text{ger systemet}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&5&x_1\\2&3&4&7&x_2\\1&1&1&2&x_3\\2&1&0&1&x_4\\1&0&-1&-1&x_5\end{array}\right)\overset{\substack{r_2-2r_1\\r_3-r_1\\r_4-2r_1\\r_5-r_1}}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&5&x_1\\0&-1&-2&-3&-2x_1+x_2\\0&-1&-2&-3&-x_1+x_3\\0&-3&-6&-9&-2x_1+x_4\\0&-2&-4&-6&-x_1+x_5\end{array}\right)\overset{\substack{r_3-r_2\\r_4-3r_2\\r_5-2r_2\\-r_2}}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&5&x_1\\0&1&2&3&2x_1-x_2\\0&0&0&0&x_1-x_2+x_3\\0&0&0&0&4x_1-3x_2+x_4\\0&0&0&0&3x_1-2x_2+x_5\end{array}\right)\Longrightarrow\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s+t\\-2s-3t\\s\\t\end{pmatrix}=$$

$$=s\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-3\\0\\1\end{pmatrix},\quad s,t\in\mathbb{R}.$$

Insättning av löningarna för $s=1,t=0$ respektive $s=0,t=1$ i beroendeekvationen ger

$$\mathbf{u}_3=-\mathbf{u}_1+2\mathbf{u}_2,\qquad \mathbf{u}_4=-\mathbf{u}_1+3\mathbf{u}_2,$$

d v s $\mathbf{u}_3$ och $\mathbf{u}_4$ kan utses till löjliga element. Satsen om löjliga element (sats 5.3.16, sid 111) ger då att $\mathbb{U} = [(1, 2, 1, 2, 1), (2, 3, 1, 1, 0)]$. Enligt sats 6.3.15, sid 150 antas det sökta min-värdet för $\mathbf{u} = \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}$ och det minsta värdet är då $\left|\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}\right|$. För att kunna beräkna $\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}$ bestämmer vi en ON-bas i $\mathbb{U}$.

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{11}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_{2_{\perp\mathbf{f}_1}} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_{2_{\|\mathbf{f}_1}} = \mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 =$$

$$= \mathbf{u}_2 - \frac{1}{11}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\3\\1\\1\\0\end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\3\\1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{11}{11}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{f}_2 = \frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = (\mathbf{v} \bullet \mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 + (\mathbf{v} \bullet \mathbf{f}_2)\,\mathbf{f}_2 = \frac{1}{11}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\4\\-3\end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{4}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\4\\-3\end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} =$$

$$= \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\4\\-3\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\0\\2\\2\\-4\end{pmatrix} = 2\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\\-2\end{pmatrix} \Longrightarrow \left|\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}\right| = 2\sqrt{7}.$$

6. Skriv $Q$ på matrisform och bestäm egenvärdena.

$$Q(\mathbf{u}) = Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 - 4x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_4^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_4 - 8x_2x_4 =$$

$$= \begin{pmatrix} x_2 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2 & 0 & -2\\ 2 & -4 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ -2 & -4 & 0 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = X^tAX$$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -4-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ -2 & -4 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & -4-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & -4-\lambda \end{vmatrix} \overset{r_2+r_3}{=}$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & -4-\lambda & -4 \\ 0 & -8-\lambda & -8-\lambda \end{vmatrix} \overset{k_2-k_3}{=} (\lambda-3)(\lambda+8)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & -2 \\ 2 & -\lambda & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-3)(\lambda+8)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda+8)\left(-2\lambda+\lambda^2-8\right) = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = 3, -8, 1\pm 3 = -8, -2, 3, 4.$$

Enligt sats 9.1.11, sid 227 gäller då $|\mathbf{u}| = 3$ att

$$\lambda_{min}\,|\mathbf{u}|^2 = -8{\cdot}3^2 = -72 \le Q(\mathbf{u}) \le \lambda_{max}\,|\mathbf{u}|^2 = 4{\cdot}3^2 = 36$$

med likhet då $\mathbf{u}$ är en egenvektor av rätt längd, 3 i detta fall, till respektive egenvärde. Vi behöver därför endast egenvektorerna till $-8$ och 4.

$$\underline{\underline{\lambda = 4}}: \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -8 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & -8 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{\substack{r_2+r_1 \\ r_4-r_1 \\ -r_1/2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{\substack{r_4-r_2 \\ -r_2/6}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X_4 = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t\in\mathbb{R} \Longrightarrow \mathbf{u}_{max} = \pm 3\frac{1}{\sqrt{6}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\lambda = -8}}: \left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{\substack{-(r_1-5r_2)/18 \\ r_4+r_2 \\ r_2\leftrightarrow r_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X_{-8} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t\in\mathbb{R} \Longrightarrow \mathbf{u}_{min} = \pm 3\frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Avslutningsvis, då det finns både positiva och negativa egenvärden följer det att $Q$ är indefinit, se sats 9.1.9,sid 226.

7. (a) Enligt våra vanliga deriveringsregler gäller

$$(y_1 + y_2)'' = (y_1' + y_2')' = y_1'' + y_2'', \quad (\lambda y_1)'' = \lambda y_1''$$

för alla två gånger deriverbara funktioner och $\lambda \in \mathbb{R}$. Därmed följer det för alla två gånger deriverbara funktioner $y_1, y_2$ och $\lambda \in \mathbb{R}$ att

$$\begin{aligned} F(y_1 + y_2) &= (y_1 + y_2)'' + y_1 + y_2 = y_1'' + y_2'' + y_1 + y_2 = (y_1'' + y_1) + (y_2'' + y_2) = \\ &= F(y_1) + F(y_2) \\ F(\lambda y_1) &= (\lambda y_1)'' + \lambda y_1 = \lambda y_1'' + \lambda y_1 = \lambda(y_1'' + y_1) = \lambda F(y_1), \end{aligned}$$

d v s $F$ är linjär, se definition 7.2.1, sid 170.

(b) Sätt $\underline{\mathbf{g}} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_3 & \mathbf{g}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x & e^{2x} & e^{-x} \end{pmatrix}$. Då fås

$$\begin{aligned} F(\mathbf{g}_1) &= F(\sin x) = (\sin x)'' + \sin x = -\sin x + \sin x = 0 \\ F(\mathbf{g}_2) &= F(\cos x) = (\cos x)'' + \cos x = -\cos x + \cos x = 0 \\ F(\mathbf{g}_3) &= F(e^{2x}) = (e^{2x})'' + e^{2x} = 2^2 e^{2x} + e^{2x} = 5e^{2x} \\ F(\mathbf{g}_4) &= F(e^{-x}) = (e^{-x})'' + e^{x} = (-1)^2 e^{x} + e^{x} = 2e^{-x}. \end{aligned}$$

Skriver vi detta på bas koordinatform fås

$$F(\mathbf{g}_1) = F(\mathbf{g}_2) = \underline{\mathbf{g}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F(\mathbf{g}_3) = 5e^{2x} = 5\mathbf{g}_3 = \underline{\mathbf{g}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$F(\mathbf{g}_4) = 2e^{-x} = 2\mathbf{g}_4 = \underline{\mathbf{g}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A_{\underline{\mathbf{g}}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Enligt sats 7.5.4, sid 181 är

$$V(F) = [F(\mathbf{g}_1), F(\mathbf{g}_2), F(\mathbf{g}_3), F(\mathbf{g}_4)] = [0, 0, 5e^{2x}, 2e^{-x}] = [e^{2x}, e^{-x}],$$

d v s $\dim V(F) = 2$ och $e^{2x}, e^{-x}$ är en bas i $V(F)$. Därmed följer det ur dimensionssatsen, sats 7.5.6, sid 182 att $\dim N(F) = 4 - 2 = 2$. Då både $\sin x$ och $\cos x \in N(F)$ och då de är linjärt oberoende (eftersom de är basvektorer) är de en bas i $N(F)$.