Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA24
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2019-04-23 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.

På del A och B (uppgift 1–6) ska endast svar ges. De ska lämnas på ett gemensamt papper. *Varje uppgift på del A och B ger högst 1 poäng.*

Uppgifterna på del C (uppgift 7–10) ger högst 3 poäng per uppgift, och till dessa krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.

För betyg 3/4/5 krävs minst 2 poäng på del A, minst 2 poäng på del B, minst 2/3/4 uppgifter på del C som bedömts med minst 2 poäng vardera, samt minst 8/12/16 poäng totalt.

Godkänd kontrollskrivning *ger 3 poäng på del A (uppgift 1–3) som då inte behöver lösas. Markera detta genom att skriva ”G” i rutorna för uppgift 1–3.*

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen i $\mathbb{R}^n$ ses som ett höger ON-system när lämpligt.

DEL A

1. Ange alla lösningar till ekvationssystemet $\begin{cases} 3x+4y-3z=1, \\ 2x+3y-2z=2, \\ 4x+3y-3z=3. \end{cases}$

2. Betrakta vektorerna $\mathbf{u}=(1,2,0,-1)$ och $\mathbf{v}=(7,2,8,-7)$ i $\mathbb{R}^4$. Beräkna $\mathbf{v}_{\parallel\mathbf{u}}$, det vill säga den ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{u}$.

3. Bestäm arean av den triangel som har hörn i punkterna $(2,0,1)$, $(3,1,3)$ och $(5,2,2)$.

DEL B

4. Låt $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ vara standardbasen i $\mathbb{R}^2$ och sätt $\mathbf{f}_1=2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{f}_2=3\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2$. Beräkna koordinaterna för vektorn $5\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2$ i basen $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$.

5. Den linjära avbildningen $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ har avbildningsmatris $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$ i standardbasen. Bestäm alla F:s egenvärden och motsvarande egenrum.

6. Ange avbildningsmatrisen i standardbasen för den linjära avbildning på $\mathbb{R}^3$ som utför spegling i det plan som ges av $x_1+x_2+x_3=0$.

VÄND!

DEL C

7. Bestäm det kortaste avståndet i $\mathbb{R}^4$ mellan underrummet $\mathbb{U} = [(-1, 0, -2, 1), (3, 2, 4, -1)]$ och punkten $(3, 3, 3, 3)$.

8. Bestäm den allmänna lösningen till följande system av differentialekvationer:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - 3x_2(t) + 3x_3(t), \\ x_2'(t) = -2x_1(t) + 2x_3(t), \\ x_3'(t) = x_1(t) - x_2(t) + 3x_3(t). \end{cases}$$

9. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ ges av $F(p(x)) = (x-1)p'(x) - 2p(x)$ för alla polynom $p(x)$ i $\mathbb{P}_3$. ($\mathbb{P}_3$ är vektorrummet bestående av polynom vars grad är högst tre.) Bestäm en bas i $N(F)$ och en bas i $V(F)$.

10. (a) Visa att $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ om A och B är inverterbara $n \times n$-matriser. (1p)

    (b) Visa att determinanten av en godtycklig ON-matris är lika med 1 eller -1. (1p)

    (c) Antag att $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ är en linjär avbildning och att $F((1, 1, 1, 1, 1)) \neq 0$. Visa att $\dim N(F) = 4$. (1p)

LYCKA TILL!

TATA24, TENTAMEN 2019-04-23
SVAR OCH KORTFATTADE LÖSNINGSSKISSER

1. Svar: $x = 6$, $y = 4$, $z = 11$.

2. Vi har $\mathbf{v}_{\|\mathbf{u}} = \dfrac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2}\mathbf{u} = \dfrac{18}{6}(1, 2, 0, -1)$.

Svar: $(3, 6, 0, -3)$.

3. Beteckna punkterna med P, Q och R i den givna ordningen. Den sökta arean är hälften av arean av den parallellogram som spänns upp av $\overline{PQ}$ och $\overline{PR}$. Parallellogrammens area är $|\overline{PQ} \times \overline{PR}| = |(1, 1, 2) \times (3, 2, 1)| = |(-3, 5, -1)| = \sqrt{35}$.

Svar: $\dfrac{\sqrt{35}}{2}$.

4. Notera att $a\mathbf{f_1} + b\mathbf{f_2} = 5\mathbf{e_1} - 2\mathbf{e_2} \Leftrightarrow (2a + 3b, a + 3b) = (5, -2) \Leftrightarrow a = 7$, $b = -3$.

Svar: Koordinatmatrisen är $\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$.

5. Svar: Egenvärdena är -5 med egenrum $[(1, 3)]$ samt 5 med egenrum $[(2, 1)]$.

6. Med $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$ har vi $F(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - 2\mathbf{u}_{\|\mathbf{n}}$. Sålunda beräknas basvektorernas bilder $F(\mathbf{e_1}) = \frac{1}{3}(1, -2, -2)$, $F(\mathbf{e_2}) = \frac{1}{3}(-2, 1, -2)$ och $F(\mathbf{e_3}) = \frac{1}{3}(-2, -2, 1)$.

Svar: $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Låt $\mathbf{v} = (3, 3, 3, 3)$. Det sökta avståndet är $|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}|$. För att bestämma $\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}$ konstruerar vi först en ortogonal bas $(\mathbf{b_1}\ \mathbf{b_2})$ för $\mathbb{U}$ med Gram-Schmidt. Tag exempelvis $\mathbf{b_1} = (-1, 0, -2, 1)$ och $\mathbf{b_2} = (3, 2, 4, -1) - (3, 2, 4, -1)_{\|\mathbf{b_1}} = (1, 2, 0, 1)$.

Nu gäller $\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = \mathbf{v}_{\|\mathbf{b_1}} + \mathbf{v}_{\|\mathbf{b_2}} = (1, 0, 2, -1) + (2, 4, 0, 2) = (3, 4, 2, 1)$, så det kortaste avståndet är $|(0, -1, 1, 2)| = \sqrt{6}$.

Svar: $\sqrt{6}$.

8. Systemets koefficientmatris har egenvärdena -2, 2 och 4 med, i tur och ordning, egenrummen $[(1\ 1\ 0)^t]$, $[(0\ 1\ 1)^t]$ och $[(1\ 0\ 1)^t]$.

Svar: $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$, där $C_i \in \mathbb{R}$ är godtyckliga.

9. Vi beräknar avbildningsmatrisen A, förslagsvis relativt standardbasen $\underline{\mathbf{x}} = (1\ x\ x^2\ x^3)$. Basvektorernas bilder är $F(1) = -2$, $F(x) = -1 - x$, $F(x^2) = -2x$ och $F(x^3) = -3x^2 + x^3$, så

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom $\underline{\mathbf{x}}X \in N(F) \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, så spänns $N(F)$ upp av $1 - 2x + x^2$.

Vidare kan A (medelst en radoperation) överföras på en trappstegsform som har pivotelement i alla kolonner utom den tredje. Alltså utgör bilderna av första, andra och fjärde basvektorerna en bas för $V(F)$.

Svar: En bas för $N(F)$ är $(1 - 2x + x^2)$. En bas för $V(F)$ är $(-2 \quad -1 - x \quad -3x^2 + x^3)$.

Anmärkning. Eftersom de första två vektorerna i basen för $V(F)$ spänner upp $\mathbb{P}_1$, kan vi byta dem mot någon annan bas för $\mathbb{P}_1$ och exempelvis ange den lite prydligare basen $(1 \quad x \quad -3x^2 + x^3)$ för $V(F)$.

10.

(a) Associativitet hos matrisprodukter ger $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I$ och, på samma sätt, $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$, som önskat. $\square$

(b) Antag att A är en ON-matris, så $A^tA = I$. Räkneregler för determinanter ger $\det(A^tA) = \det A^t \det A = (\det A)^2$. Alltså gäller $(\det A)^2 = \det I = 1$ och påståendet följer. $\square$

(c) Dimensionssatsen säger $\dim N(F) + \dim V(F) = \dim \mathbb{R}^5 = 5$. Eftersom $V(F) \subseteq \mathbb{R}$ måste $\dim V(F) \in \{0, 1\}$. Nu gäller $0 \neq F((1, 1, 1, 1, 1)) \in V(F)$, så $V(F) \neq \{0\}$ och därför har vi $\dim V(F) = 1$. $\square$