Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA24
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2018-08-30 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.

På del A och B (uppgift 1–6) ska endast svar ges. De ska lämnas på ett gemensamt papper. *Varje rätt svar ger 1 poäng, fel svar 0 poäng.*

På del C (uppgift 7–10) ges maximalt 3 poäng per uppgift. Här krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.

För betyg 3/4/5 krävs minst 2 poäng på vardera del A och B, minst 2/3/4 uppgifter som bedömts med minst 2 poäng vardera på del C samt minst 8/12/16 poäng totalt.

Godkänd kontrollskrivning ht 2017 *ger 3 poäng på del A (uppgift 1–3) som då ej behöver lösas. Markera detta genom att skriva ”G” i rutorna för uppgift 1–3.*

Lösningsskiss finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen ses som ett höger ON-system när lämpligt.

DEL A

1. Låt $\overline{u} = (1, 3, -1)$ och $\overline{v} = (0, 1, 2)$. Finn en vektor i $\mathbb{R}^3$ som är ortogonal mot både $\overline{u}$ och $\overline{v}$.

2. Beräkna $(AB)^t$ då $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

3. Bestäm minstakvadratlösningen till ekvationssystemet $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - x_2 = -1 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$.

DEL B

4. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har i standardbasen avbildningsmatris $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Bestäm $F((2, -1))$.

5. Låt $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som har avbildningsmatrisen $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ i standardbasen. Beräkna alla F:s egenvärden och motsvarande egenrum.

6. En linjär avbildning $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har avbildningsmatrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ i standardbasen $\underline{e}$. Ange F:s avbildningsmatris i basen $\underline{f} = ((-1, 1) \quad (2, 0))$.

VÄND !

DEL C

7. Låt Π vara planet i $\mathbb{R}^3$ som ges av $x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 7$, och låt $P = (3, 10, 13)$. Bestäm den punkt på Π som ligger närmast P samt (kortaste) avståndet mellan Π och P.

8. Låt
$$\mathbb{W} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{array} \right. \right\} \subset \mathbb{R}^5.$$
Finn en ON-bas för $\mathbb{R}^5$ där varje vektor antingen tillhör $\mathbb{W}$ eller $\mathbb{W}^\perp$.

9. Bestäm baser till nollrummet $N(F)$, värderummet $V(F)$ samt $N(F) \cap V(F)$ då $F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ relativt basen $\underline{p} = (1 \quad x \quad x^2)$ har avbildningsmatris
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

10. Lös systemet av differensekvationer:
$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & a_n - b_n + c_n \\ b_{n+1} & = & 2a_n + b_n - 2c_n \\ c_{n+1} & = & 2a_n - b_n \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{lcr} a_0 & = & 1 \\ b_0 & = & 0 \\ c_0 & = & -1 \end{array} \right. .$$

LYCKA TILL!

TATA24, TENTAMEN 2018-08-30
SVAR OCH KORTFATTADE LÖSNINGSSKISSER

1. $(1,3,-1)\times(0,1,2)=(7,-2,1)$.

Svar: $(7,-2,1)$.

2.

$$\left(\begin{pmatrix}-2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & -4\end{pmatrix}\right)^t = \left(\begin{pmatrix}-4 & 2\end{pmatrix}\right)^t = \begin{pmatrix}-4\\ 2\end{pmatrix}.$$

Svar: $\begin{pmatrix}-4\\ 2\end{pmatrix}$.

3. På matrisform är ekvationssystemet:

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\ -1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Normalekvationen är därför

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ -1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\ 7\end{pmatrix}.$$

Detta system har lösningen $x_1=1, x_2=2$.

Svar: $x_1=1, x_2=2$.

4.

$$\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\ 4\end{pmatrix}.$$

Svar: $(-8,4)$.

5.

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ 0 & 3-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda=2 \text{ eller } \lambda=3.$$

För egenvärdet 2 får vi ekvationen

$$\left(\begin{array}{cc|c}0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{array}\right),$$

som har lösningarna $x_1=t, x_2=0$ $(t\in\mathbb{R})$.

För egenvärdet 3 får vi ekvationen

$$\left(\begin{array}{cc|c}-1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right),$$

som har lösningarna $x_1=t, x_2=t$ $(t\in\mathbb{R})$.

Svar: Egenvärde 2 med egenrum $[(1,0)]$ och egenvärde 3 med egenrum $[(1,1)]$.

6. Vi har

$$\underline{f} = \underline{e}T = \underline{e}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

så om $\underline{f}Y=\underline{e}X$ får vi

$$F(\underline{f}Y)=F(\underline{e}X)=\underline{e}AX=\underline{f}T^{-1}ATY.$$

Eftersom

$$T^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

får vi att F i basen $\underline{f}$ har matris

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Svar: $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Punken $(7, 0, 0)$ ligger i planet, så vektorn $\overline{v} = (3, 10, 13) - (7, 0, 0) = (-4, 10, 13)$ går mellan denna punkt och punkten P. Planet har en normalvektor $\overline{n} = (1, 3, 4)$.

Eftersom

$$\overline{v}_{\|\overline{n}} = \frac{\overline{v} \bullet \overline{n}}{|\overline{n}|^2}\overline{n} = 3(1, 3, 4),$$

får vi att

$$S = (3, 10, 13) - 3(1, 3, 4) = (0, 1, 1)$$

är den punkt på Π som ligger närmast P. Vidare ges avståndet av $|3(1, 3, 4)| = 3\sqrt{26}$.

Svar: Närmaste punkt är $(0, 1, 1)$ och avståndet är $3\sqrt{26}$.

8.

$$\mathbb{W}^{\perp} = [(1, 0, 1, 0, 1), (0, 1, 0, -1, 0)].$$

Eftersom dessa två vektorer redan är ortogonala mot varandra får vi att

$$\overline{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, 0, 1), \quad \overline{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1, 0)$$

utgör en ON-bas till $\mathbb{W}^{\perp}$.

För att bilda en ON-bas till $\mathbb{W}$ börjar vi med att välja de två första vektorerna på ett genomtänkt sätt för att minimera jobbet. Notera att

$$\overline{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1, 0), \quad \overline{f}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0, 0)$$

både är ortogonala mot $\overline{f}_1$ och $\overline{f}_2$ samt varandra. Alltså kan vi ta dessa som våra första två vektorer i basen till $\mathbb{W}$. Vi behöver nu en till då $\mathbb{W}$ är tredimensionellt. För detta låter vi $\overline{u}_5 = (1, 0, 0, 0, -1) \in \mathbb{W}$ och använder Gram-Schmidt:

$$\overline{v}_5 = \overline{u}_5 - \overline{u}_{5\|[\overline{f}_3, \overline{f}_4]} = \overline{u}_5 - (\overline{u}_5 \bullet \overline{f}_3)\overline{f}_3 - (\overline{u}_5 \bullet \overline{f}_4)\overline{f}_4 = \frac{1}{2}(1, 0, 1, 0, -2).$$

Slutligen får vi

$$\overline{f}_5 = \frac{\overline{v}_5}{|\overline{v}_5|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 0, 1, 0, -2).$$

(Efter detta steg dubbelkollar vi förstås att vi räknat rätt genom att testa att denna vektor verkligen är ortogonal mot de tidigare vektorerna)

Eftersom $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, 0, 1) \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1, 0)\right)$ är en ON-bas till $\mathbb{W}^{\perp}$ och $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1, 0) \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0, 0) \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 0, 1, 0, -2)\right)$ är en ON-bas till $\mathbb{W}$, så utgör dessa vektorer tillsammans en ON-bas till $\mathbb{R}^5$ med den sökta egenskapen.

Svar: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, 0, 1) \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1, 0) \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1, 0) \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0, 0) \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 0, 1, 0, -2)\right)$

9.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & c_0 \\ 0 & 1 & -2 & c_1 \\ 1 & 0 & -1 & c_2 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & -1 & -c_0 + c_1 \\ 0 & 1 & -2 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & c_0 - c_1 + c_2 \end{array}\right).$$

$N(F)$ ges av lösningarna svarande mot $c_0 = c_1 = c_2 = 0$, så

$$N(F) = \left\{ \underline{p}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} : \left\{ \begin{array}{l} a_0 - a_2 = 0 \\ a_1 - 2a_2 = 0 \end{array} \right. \right\} = \left\{ \underline{p}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} : \left\{ \begin{array}{l} a_0 = t \\ a_1 = 2t \\ a_2 = t \end{array} \right. \right\} = [1 + 2x + x^2].$$

Då vi i trappstegsformen har pivotelement i första och andra kolumnen, samt kravet i den sista raden ser vi att $V(F)$ ges av

$$V(F) = \left[\underline{p} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{p} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = [-1 + x^2, 1 + x] = \left\{ \underline{p} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} : c_0 - c_1 + c_2 = 0 \right\}.$$

Eftersom $1 - 2 + 1 = 0$ ser vi att $N(F) \subset V(F)$.

Svar: $(-1 + x^2 \quad 1 + x)$ är en bas till $V(F)$ och $(1 + 2x + x^2)$ är en bas till $N(F) = N(F) \cap V(F)$.

10. På matrisform har vi

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix},$$

d.v.s. med

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix},$$

gäller

$$X_n = AX_{n-1} = \ldots = A^n X_0,$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Vi har

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \cdots \Leftrightarrow \lambda = -1, 1 \text{ eller } 2.$$

För $\lambda = -1$ får vi ekvation för egenrummet:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

och t.ex. får vi att en egenvektor ges av $\overline{f}_1 = (0, 1, 1)$.

För $\lambda = 1$ får vi ekvation för egenrummet:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

och t.ex. får vi att en egenvektor ges av $\overline{f}_2 = (1, 1, 1)$.

För $\lambda = 2$ får vi ekvation för egenrummet:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

och t.ex. får vi att en egenvektor ges av $\overline{f}_3 = (1, 0, 1)$.

Om vi inför basen $\underline{f} = (\overline{f}_1 \quad \overline{f}_2 \quad \overline{f}_3)$ har vi alltså

$$\underline{f} = \underline{e}T = \underline{e} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

och

$$T^{-1} = \cdots = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alltså gäller med

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

att

$$A^n = (TDT^{-1})^n = TD^nT = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1-2^n & -1+2^n \\ 1-(-1)^n & 1 & -1+(-1)^n \\ 1-(-1)^n & 1-2^n & -1+(-1)^n+2^n \end{pmatrix}.$$

Alltså får vi

$$X_n = \begin{pmatrix} 1 & 1-2^n & -1+2^n \\ 1-(-1)^n & 1 & -1+(-1)^n \\ 1-(-1)^n & 1-2^n & -1+(-1)^n+2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^n \\ 2-2(-1)^n \\ 2-2(-1)^n-2^n \end{pmatrix}.$$

Svar: $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^n \\ 2-2(-1)^n \\ 2-2(-1)^n-2^n \end{pmatrix}.$