Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA24
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2018-04-03 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.

På del A och B (uppgift 1–6) ska endast svar ges. De ska lämnas på ett gemensamt papper. *Varje rätt svar ger 1 poäng, fel svar 0 poäng.*

På del C (uppgift 7–10) ges maximalt 3 poäng per uppgift. Här krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.

För betyg 3/4/5 krävs minst 2 poäng på vardera del A och B, minst 2/3/4 uppgifter som bedömts med minst 2 poäng vardera på del C samt minst 8/12/16 poäng totalt.

Godkänd kontrollskrivning ht 2017 *ger 3 poäng på del A (uppgift 1–3) som då ej behöver lösas. Markera detta genom att skriva "G" i rutorna för uppgift 1–3.*

Lösningsskiss finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen ses som ett höger ON-system när lämpligt.

DEL A

1. Beräkna (kortaste) avståndet mellan origo och linjen med ekvationen $x_1 + 3x_2 = 1$ i $\mathbb{R}^2$.

2. Finn alla punkter (x_1, x_2, x_3) i $\mathbb{R}^3$ som ligger på båda planen med följande ekvationer:
$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 5, \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 7. \end{array}$$

3. Bestäm en bas till $\mathbb{W} = [(1,2,0,3), (-1,2,3,1), (0,4,3,4)] \subset \mathbb{R}^4$.

DEL B

4. Endast en av följande matriser är avbildningsmatrisen till en linjär avbildning $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ i standardbaserna: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

   Bestäm $F((1,2,0))$.

5. Ange $\overline{v}$:s koordinater i basen $\underline{f} = \left(\underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ \underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, där $\overline{v} = \underline{e}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (och $\underline{e}$ är en bas i $\mathbb{R}^2$).

6. Låt $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som har avbildningsmatrisen $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ i standardbasen. Bestäm alla F:s egenvärden och motsvarande egenrum.

VÄND !

DEL C

7. Betrakta de fem matriserna

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \; E = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Visa att A är inverterbar. (1p)

   (b) Bestäm en matris X så att $A^{-1}(XB + C) = DE$. (2p)

8. Låt $\mathbb{W} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\} \subset \mathbb{R}^4$.

   (a) Bestäm en ON-bas till det ortogonala komplementet $\mathbb{W}^\perp$. (1p)

   (b) Bestäm en ON-bas till $\mathbb{W}$. (2p)

9. Låt $F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$ vara den linjära avbildning som ges av

$$F(c_0 + c_1 x + c_2 x^2) = (c_0 - c_1 + c_2) + (2c_0 + c_1 + 2c_2)x^2 + c_1 x^3.$$

   Ange baser till nollrummet $N(F)$ och värderummet $V(F)$.

10. Betrakta punkterna $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (-1, -2)$, $Q_1 = (6, -3)$ och $Q_2 = (-6, 3)$. Alla fyra ligger på en viss ellips E. De punkter på E som ligger närmast origo är P_1 och P_2 och de som ligger längst från origo är Q_1 och Q_2. Bestäm en ekvation (uttryckt i standardbasens koordinater x_1, x_2) för ellipsen E.

LYCKA TILL!

TATA24, TENTAMEN 2018-04-03
SVAR OCH KORTFATTADE LÖSNINGSSKISSER

1. Linjen har en normalvektor $(1,3)$, så linjen $(t,3t)$ går genom origo och skär linjen $x_1+3x_2=1$ i rät vinkel i punkten som ges av att $t+3(3t)=10t=1$, d.v.s. i $(1/10,3/10)$. Avståndet är alltså $|(1/10,3/10)| = 1/\sqrt{10}$.

Svar: $1/\sqrt{10}$.

2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 7 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right),$$

så punkterna som ligger på båda planen ges av $(x_1,x_2,x_3) = (2+t,3+t,t)$, $t\in\mathbb{R}$.

Svar: $(x_1,x_2,x_3) = (2+t,3+t,t)$, $t\in\mathbb{R}$.

3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Eftersom vi i den sista matrisen, som är på trappstegsform, har pivotelement i första och andra kolumnen bildar de två första vektorerna en bas till $\mathbb{W}$.

Svar: $((1,2,0,3) \quad (-1,2,3,1))$.

4. Den enda matrisen som har rätt format är

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Eftersom

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

så har vi $F(1,2,0) = (5,3)$.

Svar: $(5,3)$.

5.

$$\underline{e}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{f}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Svar: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(4-\lambda)$$

ger att vi har egenvärdena $\lambda=-1$ och $\lambda=4$.

För $\lambda=-1$ får vi ekvationssystemet för motsvarande egenrum

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

som har lösningarna $t(1,-1)$.

För $\lambda=4$ får vi ekvationssystemet för motsvarande egenrum

$$\left(\begin{array}{cc|c} -5 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

som har lösningarna $t(0,1)$.

Svar: $\lambda = -1$ med egenrum $[(1,-1)]$ och $\lambda = 4$ med egenrum $[(0,1)]$.

7.

(a)

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1(0\cdot 1 - (-1)\cdot(-1)) + 2(3\cdot(-1) - 0\cdot 1) = -5 \neq 0.$$

(b) $A^{-1}(XB + C) = DE \Leftrightarrow XB + C = ADE \Leftrightarrow XB = ADE - C \Leftrightarrow X = (ADE - C)B^{-1}$.

$$B^{-1} = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

så

$$X = (ADE - C)B^{-1} = \cdots = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} -51 & 32 \\ 28 & -11 \\ -26 & 12 \end{pmatrix}$$

Svar: $X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 51 & -32 \\ -28 & 11 \\ 26 & -12 \end{pmatrix}$.

8.

(a) Vi ser att $\mathbb{W}$ är mängden av alla vektorer (x_1, x_2, x_3, x_4) sådana att

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = (1,1,-1,1) \bullet (x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$$

Alltså har vi att $\overline{f}_1 = \frac{1}{2}(1,1,-1,1)$ bildar en ON-bas till det ortogonala komplementet.

Svar: $\left(\frac{1}{2}(1,1,-1,1)\right)$

(b) Ett alternativ är att parametrisera lösningarna till ekvationen och först skapa en bas och sedan använda Gram-Schmidt på denna. Här kan vi dock istället försöka välja de två första vektorerna på ett lämpligt sätt och sedan bestämmer vi den sista efter det. Vi ser att

$$\overline{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0), \quad \overline{f}_3 \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1)$$

båda ligger i $\mathbb{W}$ (d.v.s. är ortogonala mot $\overline{f}_1$) och är ortogonala mot varandra. Den sista vektorn $\overline{f}_4 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ kan nu bestämmas av att den ska vara ortogonal mot $\overline{f}_1, \overline{f}_2$ och $\overline{f}_3$. D.v.s. den ska lösa ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

En lösning till detta är $\overline{f}_4 = \frac{1}{2}(1,1,1,-1)$.

Svar: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0) \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1) \quad \frac{1}{2}(1,1,1,-1)\right)$.

9. Med $\underline{p}_2 = (1 \quad x \quad x^2)$ och $\underline{p}_3 = (1 \quad x \quad x^2 \quad x^3)$ gäller

$$F(\underline{p}_2\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}) = \underline{p}_3\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Eftersom

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

så ser vi att de två första kolumnerna i VL är koordinaterna för en bas till $V(F)$.

D.v.s. $(1 + 2x^2 \quad -1 + x^2 + x^3)$ är en bas i $V(F)$.

Lösningarna till ekvationssystemet är $(c_0, c_1, c_2) = t(-1, 0, 1)$, så $(-1 + x^2)$ är en bas till $N(F)$.

Svar: $(1 + 2x^2 \quad -1 + x^2 + x^3)$ är en bas till $V(F)$ och $(-1 + x^2)$ är en bas till $N(F)$.

10. Med $\underline{f} = (\overline{f}_1\ \overline{f}_2) = \underline{e}T = \underline{e}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, där $\underline{e}$ är standardbasen, ser vi att ellipsen ges av

$$Q(\underline{f}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = ay_1^2 + by_2^2 = c,$$

för lämpliga val av a, b, c, eftersom

$$(1, 2) = \sqrt{5}\overline{f}_1, \quad (-6, 3) = 3\sqrt{5}\overline{f}_2.$$

Insatt i Q ger detta $5a = c$ respektive $45b = c$. Väljer vi nu $c = 45$ får vi alltså $a = 9$ och $b = 1$. D.v.s. med $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$Q(\underline{f}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = 9y_1^2 + y_2^2 = Y^tAY = (y_1\ y_2)\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 45.$$

Vidare gäller med $\underline{e}X = \underline{f}Y$ att $Y = T^tX$. D.v.s.

$$Q(\underline{e}X) = Q(\underline{f}Y) = Y^tAY = X^tTAT^tX = \cdots = X^t\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 13 & 16 \\ 16 & 37 \end{pmatrix}X.$$

D.v.s.

$$13x_1^2 + 32x_1x_2 + 37x_2^2 = 5 \cdot 45 = 225.$$

Svar: $13x_1^2 + 32x_1x_2 + 37x_2^2 = 225.$