Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA24
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2018-01-11 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.

På del A och B (uppgift 1–6) ska endast svar ges. De ska lämnas på ett gemensamt papper. *Varje rätt svar ger 1 poäng, fel svar 0 poäng.*

På del C (uppgift 7–10) ges maximalt 3 poäng per uppgift. Här krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.

För betyg 3/4/5 krävs minst 2 poäng på vardera del A och B, minst 2/3/4 uppgifter som bedömts med minst 2 poäng vardera på del C samt minst 8/12/16 poäng totalt.

Godkänd kontrollskrivning ht 2017 *ger 3 poäng på del A (uppgift 1–3) som då ej behöver lösas. Markera detta genom att skriva ”G” i rutorna för uppgift 1–3.*

Lösningsskiss finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen ses som ett höger ON-system när lämpligt.

DEL A

1. Finn minstakvadratlösningen till ekvationssystemet $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -4, \\ -x_1 + x_2 = 2, \\ 3x_1 + x_2 = 8. \end{cases}$

2. Låt Π beteckna det plan i $\mathbb{R}^3$ som uppfyller att $(1, -2, 3)$ är den punkt på Π som ligger närmast origo. Ange, på normalform, en ekvation för Π.

3. Bestäm skärningspunkten mellan linjerna i $\mathbb{R}^3$ som ges av
$$(1, 0, -1) + t(-1, 2, 1), \quad t \in \mathbb{R}$$
respektive
$$(-1, -5, -14) + s(0, 3, 5), \quad s \in \mathbb{R}.$$

DEL B

4. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ges av spegling i linjen som har ekvationen $x_1 + 3x_2 = 0$. Bestäm F:s avbildningsmatris i standardbasen.

5. Beräkna determinanten för matrisen $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

6. Ange en bas till värderummet $V(F)$ för den avbildning $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ som i standardbaserna har avbildningsmatris
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

VÄND !

DEL C

7. Betrakta delrummet $\mathbb{W} = [(1,-2,0,1),(0,-1,0,4)]$ till $\mathbb{R}^4$.

   (a) Bestäm en ON-bas till $\mathbb{W}$. (1p)

   (b) Bestäm en ON-bas till det ortogonala komplementet $\mathbb{W}^\perp$. (2p)

8. Lös systemet av differentialekvationer $\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) + 6x_2(t), \\ x_2'(t) = 2x_1(t) - x_2(t). \end{cases}$

9. Antag att $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ i standardbasen har avbildningsmatrisen $\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

   (a) Visa att F är en vridning kring en linje genom origo och ange en ekvation på parameterform för denna linje. (2p)

   (b) Bestäm vridningsvinkeln $\theta \in [0,\pi]$ (svaret får innehålla arccos). (1p)

10. Definiera en linjär avbildning $F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ genom att låta

$$F(a + bx + cx^2) = a + c + (2a + b)x + (b - 2c)x^2.$$

   (a) Bestäm baser till F:s värderum $V(F)$ och nollrum $N(F)$. (2p)

   (b) Avgör om det är sant att varje $p \in \mathbb{P}_2$ kan skrivas som en summa $p = p_1 + p_2$ för några $p_1 \in V(F)$ och $p_2 \in N(F)$. (1p)

LYCKA TILL!

TATA24, TENTAMEN 2018-01-11
SVAR OCH KORTFATTADE LÖSNINGSSKISSER

1. Vi ska lösa $AX = Y$ i minstakvadratmening där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

D.v.s. vi ska lösa normalekvationen $A^tAX = A^tY$.

$$(A^tA|A^tY) = \left(\begin{array}{cc|c} 11 & 4 & 18 \\ 4 & 6 & 2 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Svar: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$.

2. Eftersom $(1, -2, 3)$ ligger på planet och dessutom är närmsta punkt till origo så måste vektorn $(1, -2, 3)$ vara en normal till planet. D.v.s. planet ges av

$$(1, -2, 3) \bullet (x_1, x_2, x_3) = (1, -2, 3) \bullet (1, -2, 3),$$

vilket ger

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14.$$

Svar: $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14$.

3.

$$(1, 0, -1) + t(-1, 2, 1) = (-1, -5, -14) + s(0, 3, 5) \Leftrightarrow s(0, 3, 5) - t(-1, 2, 1) = (1, 0, -1) - (-1, -5, -14),$$

har lösning $t = 2, s = 3$. Sätter vi in t.ex. $t = 2$ i den första linjens ekvation får vi

$$(1, 0, -1) + 2(-1, 2, 1) = (-1, 4, 1)$$

Svar: $(-1, 4, 1)$.

4. Vi har att linjen har normal $\overline{n} = (1, 3)$, och $F(\overline{u}) = \overline{u} - 2\overline{u}_{\|\overline{n}}$. D.v.s.

$$F(x_1, x_2) = (x_1, x_2) - 2\frac{(x_1, x_2) \bullet (1, 3)}{|(1, 3)|^2}(1, 3) = \frac{1}{5}(4x_1 - 3x_2, -3x_1 - 4x_2) = \underline{e}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Svar: $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$.

5.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \dots = 10.$$

Svar: 10.

6. Eftersom första och tredje kolumnen är lika, den fjärde kolumnen är noll, värderummet "är kolumnrummet" till matrisen samt att de två första kolumnerna uppenbarligen inte är parallella ser vi att $((1, 0, 2) \quad (2, 1, 5))$ är en bas till $V(F)$.

Svar: $((1, 0, 2) \quad (2, 1, 5))$.

7. (a): Vi använder Gram-Schmidt på de två givna vektorerna $(1,-2,0,1), (0,-1,0,4)$ som spänner upp $\mathbb{W}$.

$$\overline{f}_1 = \frac{1}{|(1,-2,0,1)|}(1,-2,0,1) = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,0,1).$$

$$\overline{u}_2 = (0,-1,0,4) - (0,-1,0,4)_{\|\overline{f}_1} = (0,-1,0,4) - \frac{(0,-1,0,4)\bullet(1,-2,0,1)}{6}(1,-2,0,1) = (-1,1,0,3),$$

$$\overline{f}_2 = \frac{1}{|\overline{u}_2|}\overline{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{11}}(-1,1,0,3).$$

Svar: $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,0,1) \quad \frac{1}{\sqrt{11}}(-1,1,0,3)\right)$.

(b): Vi börjar med att bestämma en bas till $\mathbb{W}^\perp$. Notera att (x_1,x_2,x_3,x_4) ligger i $\mathbb{W}^\perp$ om och endast om den är ortogonal mot båda vektorerna $(1,-2,0,1)$ och $(-1,1,1,2)$. D.v.s. om och endast om

$$\begin{cases} (1,-2,0,1)\bullet(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ (0,-1,0,4)\bullet(x_1,x_2,x_3,x_4) = -x_2 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Systemet

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

har parameterlösningarna

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) = (7t,4t,s,t) = s(0,0,1,0) + t(7,4,0,1).$$

Alltså är $((0,0,1,0) \quad (7,4,0,1))$ en bas till $\mathbb{W}^\perp$. *Vi kan redan här se att dessa vektorer är ortogonala, så de behöver endast normeras, men för fullständighetens skull kör vi Gram-Schmidt också:*

$$\overline{f}_3 = \frac{1}{|(0,0,1,0)|}(0,0,1,0) = (0,0,1,0).$$

$$\overline{u}_4 = (7,4,0,1) - (7,4,0,1)_{\|\overline{f}_3} = (7,4,0,1) - ((7,4,0,1)\bullet(0,0,1,0))(2,1,1,0) = (7,4,0,1),$$

$$\overline{f}_4 = \frac{1}{|\overline{u}_4|}\overline{u}_4 = \frac{1}{\sqrt{66}}(7,4,0,1).$$

Svar: $\left((0,0,1,0) \quad \frac{1}{\sqrt{66}}(7,4,0,1)\right)$.

8. Med matrisnotation ska vi lösa $X' = AX$ där

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vi börjar med att hitta egenvärdena till A.

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 6 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda) - 6\cdot 2 = \lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0$$

vilket ger $\lambda_1 = 5$ och $\lambda_2 = -3$. Egenrummet svarande mot λ_1 ges nu av

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 6 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \end{array}\right),$$

d.v.s. $\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$.

Egenrummet svarande mot λ_2 ges nu av

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right),$$

d.v.s. $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$.

Vi vet nu att den allmänna lösningen ges av

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3t}.$$

Svar: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3t}$.

9. (a): Vi kollar först att $A^tA = I$, vilket stämmer. Alltså är F en isometri. Vi vet då att F är en vridning om och endast om $\det A = 1$, vilket vi ser är fallet.

Vridningsaxeln ges av lösningar X till $F(\underline{e}X) = \underline{e}X$, vilket är detsamma som $AX = X$, eller $(A - I)X = 0 \Leftrightarrow (7A - 7I)X = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 6 & 2 & 0 \\ -6 & -5 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Lösningarna till detta är $\underline{e}X = t(1, 0, 2)$, vilket är en parameterform för den linje som vridningen sker runt.

Svar: $(x_1, x_2, x_3) = t(1, 0, 2)$, $t \in \mathbb{R}$.

(b): Vi väljer en vektor som är ortogonal mot $(1, 0, 2)$, t.ex. $(0, 1, 0)$ och ser hur mycket denna vrids. $F(0, 1, 0) \bullet (0, 1, 0) = |F(0, 1, 0)||(0, 1, 0)| \cos(\theta)$ vilket ger

$$\cos(\theta) = \left(\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{7}.$$

Svar: $\arccos(2/7)$.

10. (a): Med $\underline{p} = (1 \quad x \quad x^2)$ har vi

$$F(\underline{p}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \underline{p}\begin{pmatrix} a + c \\ 2a + b \\ b - 2c \end{pmatrix} = \underline{p}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Eftersom

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \alpha \\ 2 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & -2 & \gamma \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & -2 & \beta - 2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha - \beta + \gamma \end{array}\right),$$

så ser vi att

$$V(F) = [1 + 2x, x + x^2] = \{\alpha + \beta x + \gamma x^2 : 2\alpha - \beta + \gamma = 0\}.$$

Vidare ges $N(F)$ av lösningarna till systemet med $\alpha = \beta = \gamma = 0$:

$$\begin{cases} a = -t \\ b = 2t \\ c = t \end{cases}$$

D.v.s. $N(F) = [1 - 2x - x^2]$.

Svar: $(1 + 2x \quad x + x^2)$ är en bas till $V(F)$ och $(1 - 2x - x^2)$ är en bas till $N(F)$.

(b): Vi kollar om $N(F) \cap V(F) = \{0\}$. Om detta inte gällde måste $1 - 2x - x^2$ ligga i $V(F)$. Men med $\alpha = 1, \beta = -2, \gamma = -1$ insatt i ekvationen för $V(F)$ ovan får vi

$$2\alpha - \beta + \gamma = 2 + 2 - 1 = 3 \neq 0.$$

Alltså ligger den inte i $V(F)$, vilket betyder att det går att skriva varje vektor på den angivna formen. (Notera att detta ger att $(1 + 2x \quad x + x^2 \quad 1 - 2x - x^2)$ utgör en bas till $\mathbb{P}_2$, alltså kan varje vektor $p \in \mathbb{P}_2$ skrivas på formen $p = \lambda_1(1 + 2x) + \lambda_2(x + x^2) + \lambda_3(1 - 2x - x^2)$. Låt nu $p_1 = \lambda_1(1 + 2x) + \lambda_2(x + x^2)$ och $p_2 = \lambda_3(1 - 2x - x^2)$.)

Svar: Ja, det går att skriva varje vektor på den angivna formen.