Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA24
Provkod: TEN1

# Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

**2017-08-19 kl 14.00–19.00**

*Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.*

**På uppgift 1–6 ska endast svar ges, och dessa kan lämnas på ett gemensamt papper**. *Varje rätt svar ger 1 poäng, fel svar 0 poäng.*
*Uppgift 7–11 ger maximalt 3 poäng per uppgift; fullständiga och välmotiverade lösningar krävs.*
*För betyg 3 krävs minst 8 poäng på skrivningen samt minst 3 uppgifter som bedömts med minst 2 poäng per uppgift. För betyg 4 respektive 5 räcker totalt 12 respektive 16 poäng på skrivningen samt minst 3 respektive 4 uppgifter som bedömts med minst 2 poäng per uppgift.*

**Godkänd kontrollskrivning ht2016** *ger 3 poäng på uppgift 1–3 (som alltså inte behöver lösas). Markera detta genom att skriva* **"G" i rutorna för uppgifterna 1-3.**

*Lösningsskiss finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.*

**Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen ses som ett höger ON-system när lämpligt.**

1. Bestäm en ekvation på parameterform för den linje i $\mathbb{R}^3$ som går genom punkten $(1, 0, 1)$ och är parallell med båda planen
$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 1,$$
$$x_1 + x_2 - 4x_3 = 4.$$

2. Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ \phantom{x_1 +{}} x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 5. \end{cases}$$

3. Bestäm (kortaste) avståndet mellan planen
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0,$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 12.$$

4. Utvidga $\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 2), \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, -1)$ till en ON-bas till hela $\mathbb{R}^3$.

5. Bestäm dimensionen till delrummet $[1 + x, 1 - x^2, x + x^2] \subset \mathbb{P}_2$.

6. Antag att $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är en linjär avbildning som har ett egenvärde $\lambda = 1$ med motsvarande egenrum $[(1, 0, 0), (0, 1, 0)]$ och ett egenvärde $\lambda = 3$ med motsvarande egenrum $[(1, 0, 1)]$. Bestäm $F$:s matris i standardbasen.

---

**VÄND !**

7. Låt

$$\mathbb{W} = [(1,2,1,2)] \subset \mathbb{R}^4.$$

(a) Bestäm en ON-bas till $\mathbb{W}^{\perp}$. (2p)

(b) Beräkna $\overline{u}_{\|\mathbb{W}}$ då $\overline{u} = (3,1,1,2)$. (1p)

8. Antag att $A$ är en symmetrisk $2 \times 2$-matris.

(a) Visa att om andragradskurvan $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1$ utgör en ellips, då är

$$((x_1, x_2)|(y_1, y_2)) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

en skalärprodukt på $\mathbb{R}^2$. (2p)

(b) Visa att om andragradskurvan $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1$ utgör en hyperbel, då är

$$((x_1, x_2)|(y_1, y_2)) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

inte en skalärprodukt på $\mathbb{R}^2$. (1p)

9. Bestäm baser till nollrummet $N(F)$ och värderummet $V(F)$ till den linjära avbildning $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ som i standardbaserna har matris

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

10. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestäm alla egenvärden till $A$. (1p)

(b) Bestäm alla egenrum svarande mot egenvärdena från (a). (1p)

(c) Beräkna $A^7$. (1p)

11. Bestäm den linjära avbildning $F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}$ som i minstakvadratmening bäst ansluter till

$$\begin{cases} F(1) = 4 \\ F(1 + x + x^2) = 7 \\ F(1 - x + x^2) = -3 \\ F(1 - 2x + 4x^2) = 6 \end{cases}$$

**LYCKA TILL!**

## SVAR M.M., LINJÄR ALGEBRA, TATA24, 2017-08-19

**1.** $(1,-2,1)\times(1,1,-4)=(7,5,3)$ ger en riktningsvektor till linjen. Ekvationen ges nu av

$$(x_1,x_2,x_3)=(1,0,1)+t(7,5,3)\quad t\in\mathbb{R}.$$

**Svar:** $(x_1,x_2,x_3)=(1,0,1)+t(7,5,3)\quad t\in\mathbb{R}$.

**2.**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & -6 & 5 \end{array}\right) \sim\cdots\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

**Svar:** Lösning saknas.

**3.** Avståndet mellan två parallella plan ges av avståndet från en godtycklig punkt i det ena planet till det andra planet. Vi väljer punkten $(0,0,0)$ i det första planet och bestämmer avståndet till det andra planet. Avståndet ges nu av

$$|t(1,2,1)|$$

där $t$ är det unika tal sådant att $(x_1,x_2,x_3)=t(1,2,1)$ ligger i det andra planet. Detta $t$ ges av

$$t+2\cdot(2t)+t=12\Leftrightarrow t=2.$$

$$|2(1,2,1)|=2\sqrt{6}.$$

**Svar:** $2\sqrt{6}$.

**4.**

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2)\times\frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,-1)=\frac{1}{\sqrt{30}}(-2,5,1).$$

**Svar:** $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2)\quad \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,-1)\quad \frac{1}{\sqrt{30}}(-2,5,1)\right)$.

**5.** Eftersom $(1+x)-(1-x^2)=x+x^2$ och vektorerna $1+x, 1-x^2$ uppenbarligen är linjärt oberoende har delrummet dimension 2.

**Svar:** 2.

**6.** $F(1,0,0)=(1,0,0)$, $F(0,1,0)=(0,1,0)$ och $F(0,0,1)=F(1,0,1)-F(1,0,0)=3(1,0,1)-(1,0,0)=(2,0,3)$.

**Svar:** $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

**7.**

(a)

$$\mathbb{W}^{\perp}=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):(1,2,1,2)\bullet(x_1,x_2,x_3,x_4)=0\}.$$

Vi ser att $\dim\mathbb{W}^{\perp}=3$. Vi börjar därför med att välja ut en bas till delrummet, och vi ser till att välja de två första på ett genomtänkt sätt för att minimera räkningarna när vi använder Gram-Schmidt. Låt $\overline{f}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0,0)$, $\overline{f}_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(0,0,-2,1)$ samt $\overline{v}_3=(-1,0,1,0)$.

Dessa är alla tre valda att ligga i $\mathbb{W}^{\perp}$ och de två första har längd 1 och är ortogonala mot varandra. Vi låter nu

$$\overline{u}_3 = \overline{v}_3 - (\overline{v}_3 \bullet \overline{f}_1)\overline{f}_1 - (\overline{v}_3 \bullet \overline{f}_2)\overline{f}_2 = \ldots = \frac{1}{5}(-1,-2,1,2).$$

$$\overline{f}_3 = \frac{\overline{u}_3}{|\overline{u}_3|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1,-2,1,2).$$

**Svar:** $(\overline{f}_1 \quad \overline{f}_2 \quad \overline{f}_3)$ är en ON-bas till $\mathbb{W}^{\perp}$.

(b)

$$\overline{u}_{\|\mathbb{W}} = \frac{(3,1,1,2)\bullet(1,2,1,2)}{|(1,2,1,2)|^2}(1,2,1,2) = \ldots = (1,2,1,2).$$

**Svar:** $\overline{u}_{\|\mathbb{W}} = (1,2,1,2)$.

**8.** Det är tre saker som ska vara uppfyllda för en skalärprodukt, som i $\mathbb{R}^2$ är som följer:

- $((x_1,x_2)|(y_1,y_2)) = ((y_1,y_2)|(x_1,x_2))$,
- $((x_1,x_2)|k(y_1,y_2)) = k((x_1,x_2)|(y_1,y_2))$,
- $((x_1,x_2)|(x_1,x_2)) \geq 0$ med likhet om och endast om $(x_1,x_2) = (0,0)$.

I de fallen vi tittar på i denna uppgift har vi ett uttryck på formen

$$((x_1,x_2)|(y_1,y_2)) = (x_1\; x_2)A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

där $A$ är en symmetrisk matris. Att den första lagen är uppfylld följer direkt av att $A$ är symmetrisk (d.v.s. $A^t = A$), och den andra lagen gäller direkt från räknelagar för matrismultiplikation. Den tredje lagen är precis kravet att $A$ ska vara positivt definit.

(a) Kurvan är en ellips om och endast om $A$ är positivt definit, d.v.s. om alla egenvärden är strängt positiva, så alltså följer det från ovanstående att uttrycket utgör en skalärprodukt.

(b) I detta fall är $A$ inte positivt definit, och alltså utgör uttrycket ingen skalärprodukt.

**9.**

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Vi har pivotelement i första och andra kolumnen, och därför utgör $((1,2,1) \quad (2,-1,0))$ en bas till $V(F)$. Nollrummet $N(F)$ ges per definition av lösningarna till systemet:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow (x_1,x_2,x_3,x_4) = s(-1,-1,1,0) + t(-2,-1,0,1), \quad s,t,\in\mathbb{R}.$$

**Svar:** $((1,2,1) \quad (2,-1,0))$ är en bas till $V(F)$,
$((-1,-1,1,0) \quad (-2,-1,0,1))$ är en bas till $N(F)$.

**10.**

(a)

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = (1-\lambda)(-\lambda)(2-\lambda).$$

**Svar:** $0, 1, 2$.

(b) $\lambda = 0$ ger ekvationssystemt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

som har lösningarna $(x_1,x_2,x_3) = t(0,1,1)$.

$\lambda = 1$ ger ekvationssystemt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

som har lösningarna $(x_1, x_2, x_3) = t(1, 1, 1)$.

$\lambda = 2$ ger ekvationssystemt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

som har lösningarna $(x_1, x_2, x_3) = t(1, 0, 1)$.

**Svar:** $[(0, 1, 1)]$ är egenrum svarande mot egenvärdet 0,
$[(1, 1, 1)]$ är egenrum svarande mot egenvärdet 1,
$[(1, 0, 1)]$ är egenrum svarande mot egenvärdet 2.

(c)

$$\underline{f} = \underline{e}T = \underline{e}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

är en bas av egenvektorer.

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

och vi vet att med

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

gäller

$$A^7 = (TDT^{-1})^7 = TD^7T^{-1} = \ldots = \begin{pmatrix} 1 & -127 & 127 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -127 & 127 \end{pmatrix}.$$

**Svar:** $\begin{pmatrix} 1 & -127 & 127 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -127 & 127 \end{pmatrix}$.

**11.**

$$F(c_0 + c_1x + c_2x^2) = (a_0 \quad a_1 \quad a_2)\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = (c_0 \quad c_1 \quad c_2)\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

I optimala fall om det fanns en lösning skulle vi ha

$$F(1) = (a_0 \quad a_1 \quad a_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a_0 = 4$$

$$F(1 + x + x^2) = (a_0 \quad a_1 \quad a_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a_0 + a_1 + a_2 = 7$$

$$F(1 - x + x^2) = (a_0 \quad a_1 \quad a_2)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = a_0 - a_1 + a_2 = -3$$

$$F(1 - 2x + 4x^2) = (a_0 \quad a_1 \quad a_2)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = a_0 - 2a_1 + 4a_2 = 6.$$

Detta leder till ekvationssystemet:

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = Y.$$

Normalekvationen är nu

$$A^t AX = A^t Y,$$

d.v.s.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & -8 \\ 6 & -8 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -2 \\ 28 \end{pmatrix}.$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 6 & 14 \\ -2 & 6 & -8 & -2 \\ 6 & -8 & 18 & 28 \end{array} \right) \sim \cdots \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

D.v.s.

$$F(c_0 + c_1 x + c_2 x^2) = (1 \quad 4 \quad 3) \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_0 + 4c_1 + 3c_2.$$

**Svar:** $F(c_0 + c_1 x + c_2 x^2) = c_0 + 4c_1 + 3c_2$.