Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA24
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2017-04-18 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.

På uppgift 1–6 ska endast svar ges, och dessa kan lämnas på ett gemensamt papper. *Varje rätt svar ger 1 poäng, fel svar 0 poäng.*
Uppgift 7–11 ger maximalt 3 poäng per uppgift; fullständiga och välmotiverade lösningar krävs.
För betyg 3 krävs minst 8 poäng på skrivningen samt minst 3 uppgifter som bedömts med minst 2 poäng per uppgift. För betyg 4 respektive 5 räcker totalt 12 respektive 16 poäng på skrivningen samt minst 3 respektive 4 uppgifter som bedömts med minst 2 poäng per uppgift.

Godkänd kontrollskrivning ht2016 *ger 3 poäng på uppgift 1–3 (som alltså inte behöver lösas). Markera detta genom att skriva* **"G" i rutorna för uppgifterna 1-3.**

Lösningsskiss finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen ses som ett höger ON-system när lämpligt.

1. Bestäm en ekvation på normalform för det plan i $\mathbb{R}^3$ som går genom punkten $(1,-1,1)$ och är parallell med linjerna

$$\begin{aligned}(x_1,x_2,x_3) &= (1+t,1+2t,1+3t) \quad t\in\mathbb{R},\\ (x_1,x_2,x_3) &= (2t,1+t,-5) \qquad\quad t\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

2. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -1\\ x_2 + x_3 = 2\\ 3x_1 - 5x_2 - 5x_3 = -1.\end{cases}$$

3. Bestäm avståndet mellan linjen $x_1 - 2x_2 = 0$ och punkten $(1,5)$ i $\mathbb{R}^2$.

4. Bestäm en bas till delrummet i $\mathbb{R}^4$ givet av

$$\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) : \begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4=0\\ x_1-x_2+4x_3-x_4=0\end{cases}\right\}.$$

5. Bestäm avbildningsmatrisen relativt standardbaserna till den linjära avbildning $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ som ges av

$$F(x_1,x_2,x_3) = (x_1+2x_2-4x_3, x_1-7x_2).$$

6. Bestäm alla reella egenvärden och motsvarande egenrum till matrisen

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}.$$

VÄND !

7. Låt

$$\mathbb{W} = [(1,2,1,2),(2,3,0,1)] \subset \mathbb{R}^4.$$

   (a) Bestäm en ON-bas till $\mathbb{W}$. (1p)

   (b) Beräkna $\overline{u}_{\|\mathbb{W}}$ då $\overline{u} = (2,-4,0,-2)$. (1p)

   (c) Bestäm en ON-bas till $\mathbb{W}^{\perp}$. (1p)

8. Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum.

   (a) Ange definitionen av att en uppsättning vektorer $(\overline{v}_1 \quad \overline{v}_2 \ldots \overline{v}_n)$ utgör en bas till $\mathbb{V}$. (1p)

   (b) Visa (utgående från definitionen) att $(\overline{v}_1 \quad \overline{v}_2 \ldots \overline{v}_n)$ är en bas till $\mathbb{V}$ om och endast om varje vektor $\overline{u} \in \mathbb{V}$ på entydigt sätt kan skrivas på formen

$$\overline{u} = a_1\overline{v}_1 + a_2\overline{v}_2 + \ldots + a_n\overline{v}_n, \quad a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.$$

(2p)

9. Bestäm det polynom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ som i minstakvadratmening bäst ansluter till nedanstående data:

x	-2	0	1	2
y	-2	5	-6	10

10. Låt $F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ ges av

$$F(c_0 + c_1x + c_2x^2) = (-c_0 + c_1 + c_2) + (2c_0 + c_1 - 2c_2)x^2.$$

Bestäm baser till $N(F)$, $V(F)$ samt $N(F) \cap V(F)$
(*där* $N(F)$, $V(F)$ *betecknar nollrummet respektive värderummet till* F).

11. Lös systemet av differentialekvationer:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 9x_2(t) + 20x_3(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) - 7x_2(t) - 20x_3(t) \\ x_3'(t) = -x_1(t) + 5x_2(t) + 13x_3(t). \end{cases}$$

LYCKA TILL!

SVAR M.M., LINJÄR ALGEBRA, TATA24, 2017-04-18

1. $(1,2,3)\times(2,1,0) = (-3,6,-3) = -3(1,-2,1)$ ger att $\overline{n} = (1,-2,1)$ är en normal till planet. Ekvationen ges nu av

$$(1,-2,1)\bullet(x_1,x_2,x_3) = (1,-2,1)\bullet(1,-1,1).$$

Svar: $x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$.

2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & -5 & -1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Svar: $(x_1,x_2,x_3) = (3, 2-t, t)$, $t\in\mathbb{R}$.

3. Vektorn $(-1,2)$ är en normal till linjen, så det sökta avståndet ges av

$$\left|(1,5)_{\|(-1,2)}\right| = \left|\frac{(1,5)\bullet(-1,2)}{|(-1,2)|^2}(-1,2)\right| = \frac{9}{\sqrt{5}}.$$

Svar: $9/\sqrt{5}$.

4.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

som har lösningar

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) = s(-1,3,1,0) + t(0,-1,0,1).$$

Svar: $((-1,3,1,0)\quad(0,-1,0,1))$.

5.

$$F\left(\underline{e}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \underline{e}\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - 4x_3 \\ x_1 - 7x_2 \end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & -7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Svar: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Enda (reella) lösningen till

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

är $\lambda = 2$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

har lösningarna $(x_1,x_2,x_3) = (t,0,0) = t(1,0,0)$, $t\in\mathbb{R}$.

Svar: Egenvärde $\lambda = 2$ med egenrum $[(1,0,0)]$.

7.

(a)

$$\begin{aligned}
\overline{f}_1 &= \frac{1}{|(1,2,1,2)|}(1,2,1,2) = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,1,2),\\
\overline{v}_2 &= (2,3,0,1) - ((2,3,0,1) \bullet \overline{f}_1)\overline{f}_1 = \ldots = (1,1,-1,-1),\\
\overline{f}_2 &= \frac{1}{|(1,1,-1,-1)|}(1,1,-1,-1) = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1).
\end{aligned}$$

Svar: $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,1,2) \quad \frac{1}{2}(1,1,-1,-1)\right)$ är en ON-bas till $\mathbb{W}$.

(b)

$$\overline{u}_{\|\mathbb{W}} = (\overline{u} \bullet \overline{f}_1)\overline{f}_1 + (\overline{u} \bullet \overline{f}_2)\overline{f}_2 = \ldots = -(1,2,1,2).$$

Svar: $\overline{u}_{\|\mathbb{W}} = -(1,2,1,2)$.

(c)

$$\mathbb{W}^{\perp} = \left\{ (x_1,x_2,x_3,x_4) : \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right. \right\}.$$

Systemet

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right.$$

har lösningarna

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) = (3s+4t, -2s-3t, s, t).$$

Vi väljer som första vektor det vi får med $s = 1$ och $t = 0$ och sedan normerar vi:

$$\overline{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{14}}(3,-2,1,0).$$

För att välja den sista riktningen låter vi $s = 1$ och väljer t så att $(x_1,x_2,x_3,x_4) = (3+4t, -2-3t, 1, t)$ uppfyller $(x_1,x_2,x_3,x_4) \bullet (3,-2,1,0) = 0$. Detta ger

$$(3+4t, -2-3t, 1, t) \bullet (3,-2,1,0) = 18t + 14 = 0 \Leftrightarrow t = -7/9.$$

Insatt ovan får vi då

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{9}(-1,3,9,-7),$$

och normering av denna ger

$$\overline{f}_4 = \frac{1}{\sqrt{140}}(-1,3,9,-7).$$

Svar: $\left(\frac{1}{\sqrt{14}}(3,-2,1,0) \quad \frac{1}{\sqrt{140}}(-1,3,9,-7)\right)$ är en ON-bas till $\mathbb{W}^{\perp}$.

8.

(a) Vektorerna $(\overline{v}_1 \quad \overline{v}_2 \cdots \overline{v}_n)$ utgör en bas till $\mathbb{V}$ om :
   (1) vektorerna spänner upp $\mathbb{V}$, d.v.s. $\mathbb{V} = [\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n]$.
   (2) vektorerna är linjärt oberoende, d.v.s. enda lösningen till $\lambda_1\overline{v}_1 + \lambda_2\overline{v}_2 + \ldots + \lambda_n\overline{v}_n = \overline{0}$ är $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

(b) Antag först att $(\overline{v}_1 \quad \overline{v}_2 \cdots \overline{v}_n)$ utgör en bas till $\mathbb{V}$. Per definition kan då enligt (1) ovan varje vektor $\overline{u} \in \mathbb{V}$ skrivas på minst ett sätt som

$$\overline{u} = a_1\overline{v}_1 + a_2\overline{v}_2 + \ldots + a_n\overline{v}_n.$$

Antag att också

$$\overline{u} = b_1\overline{v}_1 + b_2\overline{v}_2 + \ldots + b_n\overline{v}_n.$$

Då gäller

$$\overline{u} - \overline{u} = a_1\overline{v}_1 + a_2\overline{v}_2 + \ldots + a_n\overline{v}_n - b_1\overline{v}_1 - b_2\overline{v}_2 - \ldots - b_n\overline{v}_n = \overline{0}.$$

Med $\lambda_k = a_k - b_k$ ger nu (2) i definitionen att varje $\lambda_k = a_k - b_k = 0$, d.v.s. $a_k = b_k$ vilket ger entydigheten i representationen.

Omvänt om varje vektor entydigt kan representeras på den givna formen, då är enligt antagande (1) uppfyllt per definition, och (2) följer av att ett uppenbart sätt att skriva nollvektorn är

$$\overline{0} = 0\overline{v}_1 + 0\overline{v}_2 + \ldots + 0\overline{v}_n,$$

och eftersom detta är det enda sättet att skriva nollvektorn på (via entydigheten) så gäller alltså (2) också.

9. I optimala fall (d.v.s. om polynomet antog alla de önskade värdena) skulle vi ha $p(-2) = a_0 - 2a_1 + 4a_2 = -2$, $p(0) = a_0 = 5$, $p(1) = a_0 + a_1 + a_2 = -6$ och $p(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 10$. Detta ger ekvationssystemet

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} = Y.$$

Normalekvationen är $A^tAX = A^tY$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 9 & 7 \\ 1 & 9 & 1 & 18 \\ 9 & 1 & 33 & 26 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & 1 & 18 \\ 0 & 11 & 0 & 22 \\ 0 & 7 & -1 & 13 \end{array}\right).$$

Detta ger $a_0 = -1$, $a_1 = 2$ och $a_2 = 1$, d.v.s. $p(x) = -1 + 2x + x^2$

Svar: $p(x) = -1 + 2x + x^2$.

10. Med $\underline{p} = (1 \quad x \quad x^2)$ har vi

$$F(c_0 + c_1x + c_2x^2) = F\left(\underline{p}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right) = \underline{p}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Vi tittar nu på ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Lösningarna till systemet ger oss $N(F)$:

$$\begin{cases} c_0 = t \\ c_1 = 0 \\ c_2 = t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Alltså är $(1+x^2)$ en bas till $N(F)$. Vi ser också att vi har pivotelement i första och andra kolumnen, så vi vet att en bas till $V(F)$ ges av de två första kolumnerna i originalmatrisen, d.v.s. en bas till $V(F)$ är $(-1 + 2x^2 \quad 1 + x^2)$. Här ser vi att den andra basvektorn är samma som den för $N(F)$ som alltså är ett delrum till $V(F)$.

Svar: $N(F) = N(F) \cap V(F)$ har bas $(1 + x^2)$ och $V(F)$ har bas $(-1 + 2x^2 \quad 1 + x^2)$.

11. Med matrisnotation har vi med

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

systemet

$$X' = AX = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 20 \\ 2 & -7 & -20 \\ -1 & 5 & 13 \end{pmatrix} X.$$

Egenvärdena till A ges av

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 9 & 20 \\ 2 & -7-\lambda & -20 \\ -1 & 5 & 13-\lambda \end{vmatrix} = /\text{2rad 3 läggs till rad 2}/ = \begin{vmatrix} -\lambda & 9 & 20 \\ 0 & 3-\lambda & 6-2\lambda \\ -1 & 5 & 13-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0.$$

D.v.s. vi har rötterna $\lambda = 1, 2, 3$. Vi beräknar nu egenvektorerna

$\lambda = 1:$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 9 & 20 & 0 \\ 2 & -8 & -20 & 0 \\ -1 & 5 & 12 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ger

$$(x_1, x_2, x_3) = t(2, -2, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

$\lambda = 2:$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 9 & 20 & 0 \\ 2 & -9 & -20 & 0 \\ -1 & 5 & 11 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ger

$$(x_1, x_2, x_3) = t(1, -2, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

$\lambda = 3:$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 9 & 20 & 0 \\ 2 & -10 & -20 & 0 \\ -1 & 5 & 10 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ger

$$(x_1, x_2, x_3) = t(5, -5, 3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lösningarna ges nu av

$$(x_1, x_2, x_3) = C_1(5, -5, 3)e^{3t} + C_2(1, -2, 1)e^{2t} + C_3(2, -2, 1)e^{t}.$$

Svar: $(x_1, x_2, x_3) = C_1(5, -5, 3)e^{3t} + C_2(1, -2, 1)e^{2t} + C_3(2, -2, 1)e^{t}$.