Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA24
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2017-01-09 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.

På uppgift 1–6 ska endast svar ges, och dessa kan lämnas på ett gemensamt papper. *Varje rätt svar ger 1 poäng, fel svar 0 poäng.*
Uppgift 7–11 ger maximalt 3 poäng per uppgift; fullständiga och välmotiverade lösningar krävs.
För betyg 3 krävs minst 8 poäng på skrivningen samt minst 3 uppgifter som bedömts med minst 2 poäng per uppgift. För betyg 4 respektive 5 räcker totalt 12 respektive 16 poäng på skrivningen samt minst 3 respektive 4 uppgifter som bedömts med minst 2 poäng per uppgift.

Godkänd kontrollskrivning ht2016 *ger 3 poäng på uppgift 1–3 (som alltså inte behöver lösas). Markera detta genom att skriva* **"G" i rutorna för uppgifterna 1-3.**

Lösningsskiss finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen ses som ett höger ON-system när lämpligt.

1. Bestäm en ekvation på parameterform för den linje i $\mathbb{R}^3$ som går genom punkten $(1, 1, 1)$ och är parallell med
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

2. Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 8 \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 \phantom{{}+x_2} + 6x_3 = 10. \end{cases}$$

3. Bestäm en ekvation på normalform för den linje i $\mathbb{R}^2$ som går genom origo samt är sådan att punkten $(-2, 1)$ speglas på $(2, -1)$ genom denna.

4. Bestäm en bas till delrummet $[(1, 0, 1, 2), (0, 1, 1, 5), (-1, 1, 0, 3)]$ till $\mathbb{R}^4$.

5. Bestäm avbildningsmatrisen relativt standardbaserna till den linjära avbildning $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ som ges av
$$F(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 2x_1 - 4x_2, -x_1 + 5x_2).$$

6. Bestäm egenrummet svarande mot egenvärdet $\lambda = 1$ till matrisen
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

VÄND !

7. Låt
$$\mathbb{W} = [(1,-1,1,-1),(2,0,2,0)] \subset \mathbb{R}^4.$$

(a) Bestäm en ON-bas till $\mathbb{W}$. (1p)

(b) Bestäm en ON-bas till $\mathbb{W}^\perp$. (1p)

(c) Beräkna $\overline{u}_{\|\mathbb{W}}$ då $\overline{u} = (4,0,2,0)$. (1p)

8. (a) Ange definitionen av att en avbildning $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är linjär. (1p)

(b) Visa att det för varje linjär avbildning $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ finns en matris A sådan att $F(\underline{\mathbf{e}}X) = \underline{\mathbf{e}}AX$, för alla $\underline{\mathbf{e}}X \in \mathbb{R}^3$. (1p)

(c) Visa att om en linjär avbildning $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har matris
$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$
i standardbasen, då gäller att $V(F) = [(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3),(c_1,c_2,c_3)]$, där $V(F)$ betecknar värderummet till F. (1p)

9. Låt
$$\mathbb{W} = \left\{ c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} c_0 & - & c_1 & + & 2c_2 & + & c_3 & = & 0 \\ 2c_0 & - & c_1 & + & 5c_2 & - & c_3 & = & 0 \end{array} \right. \right\} \subset \mathbb{P}_3.$$

(a) Bestäm en bas till $\mathbb{W}$. (2p)

(b) Utvidga denna till en bas till hela $\mathbb{P}_3$. (1p)

10. Låt
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestäm alla egenvärden till A. (1p)

(b) Bestäm alla egenrum svarande mot egenvärdena från (a). (1p)

(c) Beräkna A^6. (1p)

11. Bestäm matrisen relativt standardbaserna till den linjära avbildning $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ sådan att nollrummet $N(F) = [(0,1,2,3),(1,0,3,-2)]$ och
$$F(1,1,1,1) = (0,-4,4),$$
$$F(2,0,0,3) = (7,-6,13).$$

LYCKA TILL!

SVAR M.M., LINJÄR ALGEBRA, TATA24, 2017-01-09

1. $(1,-1,1)\times(1,2,4)=(-6,-3,3)=-3(2,1,-1)$ ger riktningsvektor till linjen.

Svar: $(x_1,x_2,x_3)=(1,1,1)+t(2,1,-1)$, $t\in\mathbb{R}$.

2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 & 10 \end{array}\right)\sim\cdots\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Svar: $(x_1,x_2,x_3)=(5-3t,3-2t,t)$, $t\in\mathbb{R}$

3. Informationen ger, eftersom $(2,-1)=-(-2,1)$, att $(2,-1)$ måste vara en normal till linjen.

Svar: $2x_1-x_2=0$.

4.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right)\sim\cdots\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Svar: $((1,0,1,2)\quad(0,1,1,5))$.

5.

$$F\left(\underline{e}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)=\underline{e}\begin{pmatrix} x_1+2x_2 \\ 2x_1-4x_2 \\ -x_1+5x_2 \end{pmatrix}=\underline{e}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Svar: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

6.

$$''(A-1I|0)''=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\sim\cdots\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$$\{(0,-2t,t):t\in\mathbb{R}\}=[(0,-2,1)].$$

Svar: $[(0,-2,1)]$.

7.

(a)

$$\overline{f}_1=\frac{1}{|(1,-1,1,-1)|}(1,-1,1,-1)=\frac{1}{2}(1,-1,1,-1),$$
$$\overline{v}_2=(2,0,2,0)-((2,0,2,0)\bullet\overline{f}_1)\overline{f}_1=\ldots=(1,1,1,1),$$
$$\overline{f}_2=\frac{1}{|(1,1,1,1)|}(1,1,1,1)=\frac{1}{2}(1,1,1,1).$$

Svar: $\left(\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)\quad\frac{1}{2}(1,1,1,1)\right)$ är en ON-bas till $\mathbb{W}$.

(b)

$$\mathbb{W}^\perp = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right. \right\}.$$

Vi ser enkelt att $\overline{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0)$ och $\overline{f}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1)$ uppfyller bägge dessa ekvationer och de är dessutom ortogonala mot varandra.

Svar: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0) \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1)\right)$ är en ON-bas till $\mathbb{W}^\perp$.

(c)

$$\overline{u}_{\|\mathbb{W}} = (\overline{u} \bullet \overline{f}_1)\overline{f}_1 + (\overline{u} \bullet \overline{f}_2)\overline{f}_2 = \ldots = (3, 0, 3, 0).$$

Svar: $\overline{u}_{\|\mathbb{W}} = (3, 0, 3, 0)$.

8.

(a) F är linjär om vi för alla $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$ och alla $k \in \mathbb{R}$ har

$$F(\overline{x} + \overline{y}) = F(\overline{x}) + F(\overline{y}),$$
$$F(k\overline{x}) = kF(\overline{x}).$$

(b)

$$F(x_1, x_2, x_3) = F(x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3) = x_1F(\overline{e}_1) + x_2F(\overline{e}_2) + x_3F(\overline{e}_3) =$$
$$\underline{e}x_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \underline{e}x_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \underline{e}x_3 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \underline{e} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(c) Med notationen från uppgift (b)har vi

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1(a_1, a_2, a_3) + x_2(b_1, b_2, b_3) + x_3(c_1, c_2, c_3),$$

så de vektorer vi kan få från $F(x_1, x_2, x_3)$ är precis de olika linjärkombinationerna av kolumnvektorerna från A.

9.

(a)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right).$$

Så $(c_0, c_1, c_2, c_3) = (-3s + 2t, -s + 3t, s, t) = s(-3, -1, 1, 0) + t(2, 3, 0, 1)$, vilket ger bas $(-3 - x + x^2 \quad 2 + 3x + x^3)$ till $\mathbb{W}$.

Svar: $(-3 - x + x^2 \quad 2 + 3x + x^3)$ är en bas till $\mathbb{W}$.

(b) Vektorn $1 + x$ uppfyller ekvation 1 men ej ekvation 2 i definitionen av $\mathbb{W}$ och 1 uppfyller ej ekvation 1, alltså är $(-3 - x + x^2 \quad 2 + 3x + x^3 \quad 1 + x \quad 1)$ en bas till hela $\mathbb{P}_3$.

Svar: $(-3 - x + x^2 \quad 2 + 3x + x^3 \quad 1 + x \quad 1)$ är en bas till $\mathbb{P}_3$.

10.

(a)

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 & -3 \\ 3 & 2 - \lambda & -3 \\ 3 & 1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \ldots = (1 - \lambda)(1 - \lambda)(2 - \lambda).$$

Svar: Egenvärden $\lambda_1 = 1$ (dubbelrot), $\lambda_2 = 2$ (enkelrot).

(b) $\lambda_1 = 1$ ger ekvation for egenrum:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

vilket ger lösningarna $(x_1, x_2, x_3) = s(-1, 3, 0) + t(1, 0, 1)$, eller med andra ord, egenrum $[(-1, 3, 0), (1, 0, 1)]$.
$\lambda_2 = 2$ ger ekvation for egenrum:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

vilket ger lösningarna $(x_1, x_2, x_3) = t(1, 1, 1)$, eller med andra ord, egenrum $[(1, 1, 1)]$.

Svar: Egenvärdet $\lambda_1 = 1$ ger egenrum $[(-1, 3, 0), (1, 0, 1)]$
och egenvärdet $\lambda_2 = 2$ ger egenrum $[(1, 1, 1)]$.

(c) Med

$$\underline{f} = \underline{e}T = \underline{e}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

gäller att $A = TDT^{-1}$, där

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vidare gäller $A^6 = TD^6T^{-1}$, och

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Så

$$A^6 = TD^6T^{-1} = \begin{pmatrix} 190 & 63 & -189 \\ 189 & 64 & -189 \\ 189 & 63 & -188 \end{pmatrix}.$$

Svar: $A^6 = \begin{pmatrix} 190 & 63 & -189 \\ 189 & 64 & -189 \\ 189 & 63 & -188 \end{pmatrix}$.

11. Det är lätt att se att

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

är inverterbar, så $\underline{f} = \underline{e}_4 T$ (där $\underline{e}_m$ betecknar standardbasen till $\mathbb{R}^m$) ger en väldefinierad bas till $\mathbb{R}^4$. Notera nu att informationen given i uppgiften är precis att

$$F(\underline{f}Y) = \underline{e}_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 13 \end{pmatrix} Y,$$

och eftersom $\underline{e}_4 X = \underline{f}Y$ om och endast om $X = T^{-1}Y$ får vi alltså att

$$F(\underline{e}_4 X) = \underline{e}_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 13 \end{pmatrix} T^{-1}X.$$

Den sökta matrisen ges därför av

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 13 \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 13 \end{pmatrix} \frac{1}{28} \begin{pmatrix} -9 & -4 & 7 & 6 \\ 3 & -8 & 7 & -2 \\ 9 & 32 & -7 & -6 \\ 8 & -12 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alternativt argument: Vi vet att den sökta matrisen är på formen

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{pmatrix},$$

och $F(a_1, a_2, a_3, a_4) = (b_1, b_2, b_3)$ *betyder precis att*

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Med $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (0, 1, 2, 3)$ *får vi* $(b_1, b_2, b_3) = (0, 0, 0)$ *o.s.v. för alla de vektorer vi fått värdet på* F *för. Sätter vi in alla dessa fyra kombinationer får vi alltså matrisekvationen:*

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 13 \end{pmatrix}.$$

Genom att transponera bägge sidorna kan vi skriva detta som ett system av linjära ekvationer som vi kan lösa simultant i en totalmatris:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 7 & -6 & 13 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Högersidan ovan är transponatet av den sökta matrisen.

$$\textbf{Svar:} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$