Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA24
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2016-08-20 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.

På uppgift 1–6 ska endast svar ges, och dessa kan lämnas på ett gemensamt papper. *Varje rätt svar ger 1 poäng, fel svar 0 poäng.*
Uppgift 7–11 ger maximalt 3 poäng per uppgift; fullständiga och välmotiverade lösningar krävs.
För betyg 3,4 respektive 5 räcker totalt 8, 12 respektive 16 poäng på skrivningen samt minst 2,3 respektive 4 uppgifter som bedömts med minst 2 poäng per uppgift.

Godkänd kontrollskrivning ht2015 *ger 3 poäng på uppgift 1–3 (som alltså inte behöver lösas). Markera detta genom att skriva* **"G" i rutorna för uppgifterna 1-3.**

Lösningsskiss finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen ses som ett höger ON-system när lämpligt.

1. Bestäm avståndet mellan linjerna i $\mathbb{R}^3$ som ges av
$$(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 2) + t(2, 0, 1), \quad t \in \mathbb{R},$$
$$(x_1, x_2, x_3) = t(1, 0, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 &= -8 \\ \qquad x_2 - x_3 &= -2. \end{cases}$$

3. Bestäm det plan $\mathbb{W} \subset \mathbb{R}^3$ som går genom origo och är sådant att $\overline{u} = (5, -4, 5)$ uppfyller $\overline{u}_{\|\mathbb{W}} = (3, 0, -1)$ (där detta betecknar den ortogonala projektionen av $\overline{u}$ på $\mathbb{W}$).

4. Bestäm en bas till delrummet $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 = 0, x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$ till $\mathbb{R}^4$.

5. Bestäm avbildningsmatrisen i standardbasen $\underline{e} = ((1, 0) \quad (0, 1))$ till den linjära avbildning $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som i basen $\underline{f} = ((1, 2) \quad (2, 2))$ har matris
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Bestäm alla egenvärden och motsvarande egenrum till den linjära avbildning på $\mathbb{R}^2$ som i standardbasen har matris $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

VÄND !

7. Bestäm den vektor $\overline{v} \in [(1,3,2),(-1,3,3)] \subset \mathbb{R}^3$ som minimerar $|\overline{u}-\overline{v}|^2$, där $\overline{u}=(1,-5,7)$. Ange även detta minsta värde på $|\overline{u}-\overline{v}|^2$.

8. Visa spektralsatsen för $\mathbb{R}^2$. D.v.s. visa att om en linjär avbildning $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är symmetrisk så är den diagonaliserbar.

9. Låt $\mathbb{W} = [(1,0,2,0),(-1,0,3,0)] \subset \mathbb{R}^4$.

   (a) Bestäm en ON-bas till $\mathbb{W}$. (2p)

   (b) Utvidga denna till en ON-bas till hela $\mathbb{R}^4$. (1p)

10. Bestäm största och minsta avståndet mellan ellipsen

$$Q(x_1,x_2) = 31x_1^2 - 6x_1x_2 + 39x_2^2 = 12,$$

och origo, samt ange i vilka punkter dessa antas.

11. Låt $F:\mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ vara den unika linjära avbildning som uppfyller

$$\begin{aligned} F(1+x) &= 2+x^2, \\ F(1-x) &= -2-x^2, \\ F(1+x+x^2) &= x. \end{aligned}$$

Bestäm baser till F:s nollrum $N(F)$ och värderum $V(F)$.

LYCKA TILL!

SVAR M.M., LINJÄR ALGEBRA, TATA24, 2016-08-20

1. Planet Π som innehåller den andra linjen och är parallell med den första ges av $x_2 = 0$ som har normal $\overline{n} = (0, 1, 0)$. Avståndet mellan den första linjen och detta plan ges av

$$|(1,1,2)_{\|\overline{n}}| = (1,1,2) \bullet (0,1,0) = 1.$$

Svar: 1.

2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right).$$

Svar: $(x_1, x_2, x_3) = (2, -3, -1)$.

3. Eftersom $\overline{u}_{\perp\mathbb{W}} = \overline{u} - \overline{u}_{\|\mathbb{W}} = (5, -4, 5) - (3, 0, -1) = 2(1, -2, 3)$ måste $(1, -2, 3)$ vara normal till planet.

Svar: $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$.

4.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Svar: $((-1, 1, 1, 0) \quad (0, 0, 1, 1))$.

5. $\underline{f} = \underline{e}T$ där $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ger med $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ att $F(\underline{f}Y) = F(\underline{e}X) = \underline{f}AY = \underline{e}TAT^{-1}X$. Alltså är den sökta matrisen

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Svar: $\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) = 0$ ger egenvärden $\lambda = 1, 4$. Egenrum för $\lambda = 1$ ges av lösningarna till

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{array}\right),$$

vilket ger linjen $2x_1 + 3x_2 = 0$ (basvektor $\overline{f}_1 = (-3, 2)$). Egenrum för $\lambda = 4$ ges av lösningarna till

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

vilket ger linjen $x_1 = 0$ (basvektor $\overline{f}_2 = (0, 1)$).

Svar: Egenvärde 1 med egenrum $[(-3, 2)]$ och egenvärde 4 med egenrum $[(0, 1)]$.

7. Vi vill lösa systemet

$$s\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\3&3\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-5\\7\end{pmatrix}$$

i minsta-kvadratmening (minstakvadratlösningen ger oss projektionen $\overline{v}$ av $\overline{u}=(1,-5,7)$ på $[(1,3,2),(-1,3,3)]$).

$$\begin{pmatrix}1&3&2\\-1&3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\3&3\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&14\\14&19\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&3&2\\-1&3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-5\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}14&14&0\\14&19&5\end{array}\right)\sim\cdots\sim\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&1&1\end{array}\right)$$

vilket ger minstakvadratlösningen $s=-1,t=1$. Alltså är $\overline{v}=-1(1,3,2)+1(-1,3,3)=(-2,0,1)$ och $|\overline{u}-\overline{v}|^2=|(3,-5,6)|^2=70$.

Svar: $\overline{v}=(-2,0,1)$, $|\overline{u}-\overline{v}|^2=70$.

8. Eftersom $\begin{vmatrix}a-\lambda&b\\b&c-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-(a+c)\lambda+ac-b^2$ får vi rötterna

$$\lambda=\frac{a+c}{2}\pm\sqrt{\frac{(a+c)^2}{4}-ac+b^2}=\frac{a+c}{2}\pm\sqrt{\frac{(a-c)^2}{4}+b^2}.$$

Vi ser alltså att uttrycket under roten aldrig kan bli negativt och alltså har vi bara reella rötter. Om vi har en dubbelrot måste vidare $a=c$ och $b=0$ vilket alltså innebär att vi redan har en diagonal matris. Om å andra sidan detta inte gäller har vi två olika rötter, och alltså finns en ON-bas av egenvektorer, vilket medför att avbildningen är diagonaliserbar. V.S.B.

9. a:

$$\overline{f}_1=\frac{1}{|(1,0,2,0)|}(1,0,2,0)=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2,0).$$

$$\overline{u}_2=(-1,0,3,0)-\left((-1,0,3,0)\bullet\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2,0)\right)\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2,0)=(-2,0,1,0),$$

$$\overline{f}_2=\frac{1}{|\overline{u}_2|}\overline{u}_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,0,1,0).$$

(Man kan ju också inse att $\mathbb{W}$ helt enkelt är x_1x_3-planet så även $((1,0,0,0)\quad(0,0,1,0))$ är en ON-bas till $\mathbb{W}$).

b: Eftersom $\mathbb{W}$ helt enkelt är x_1x_3-planet kan vi lägga till $\overline{f}_3=(0,1,0,0)$ och $\overline{f}_4=(0,0,0,1)$.
Svar: (a): bas till $\mathbb{W}$ är $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2,0)\quad\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,0,1,0)\right)$ (t.ex.).

(b): $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2,0)\quad\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,0,1,0)\quad(0,1,0,0)\quad(0,0,0,1)\right)$ är en utvidgning till hela $\mathbb{R}^4$ (t.ex.).

10.

$$\begin{vmatrix}31-\lambda&-3\\-3&39-\lambda\end{vmatrix}=0\ldots\Leftrightarrow\lambda_1=40,\lambda_2=30.$$

$\lambda_1=40$ ger egenrum

$$\left(\begin{array}{cc|c}-9&-3&0\\-3&-1&0\end{array}\right)$$

vilket ger att t.ex. $\overline{f}_1=\frac{1}{\sqrt{10}}(1,-3)$ är en bas till detta rum.

$\lambda_2 = 30$ ger egenrum

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 9 & 0 \end{array}\right)$$

vilket ger att t.ex. $\overline{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(3,1)$ är en bas till detta rum.
Så i basen $\underline{f}$ har vi alltså att

$$Q(\underline{f}Y) = 40y_1^2 + 30y_2^2 = 12$$

vilket ger en ellips som skär y_1-axeln i $\pm\sqrt{3/10}$ och y_2-axeln i $\pm 2/\sqrt{10}$.

Alltså är största avståndet $2/\sqrt{10}$ och antas i $(y_1, y_2) = \pm(0, 2/\sqrt{10}) \Leftrightarrow (x_1, x_2) = \pm(3/5, 1/5)$, och minsta avståndet är $\sqrt{3/10}$ och antas i $(y_1, y_2) = \pm(\sqrt{3/10}, 0) \Leftrightarrow (x_1, x_2) = \pm(\sqrt{3}/10, -3\sqrt{3}/10)$.

Svar: Största avstånd $2/\sqrt{10}$ antas i $(x_1, x_2) = \pm(3/5, 1/5)$
och minsta avstånd $\sqrt{3/10}$ antas i $(x_1, x_2) = \pm(\sqrt{3}/10, -3\sqrt{3}/10)$.

11.

$$\frac{1}{2}(F(1+x) + F(1-x)) = F(1) = \frac{1}{2}(2 + x^2 - 2 - x^2) = 0,$$
$$\frac{1}{2}(F(1+x) - F(1-x)) = F(x) = \frac{1}{2}(2 + x^2 + 2 + x^2) = 2 + x^2,$$
$$F(1 + x + x^2) - F(1+x) = F(x^2) = -2 + x - x^2.$$

Alltså har F matris $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ i basen $\underline{p}(1 \quad x \quad x^2)$. Eftersom

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

så ser vi att vi har ett endimensionellt nollrum som alltså spänns upp av 1 enligt ovan, och ett tvådimensionellt värderum som spänns upp av $2 + x^2$ och $-2 + x - x^2$.

Svar: $N(F) = [1]$ och $V(F) = [2 + x^2, -2 + x - x^2]$.