Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA24
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2016-03-29 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.

På uppgift 1–6 ska endast svar ges, och dessa kan lämnas på ett gemensamt papper. *Varje rätt svar ger 1 poäng, fel svar 0 poäng.*
Uppgift 7–11 ger maximalt 3 poäng per uppgift; fullständiga och välmotiverade lösningar krävs.
För betyg 3,4 respektive 5 räcker totalt 8, 12 respektive 16 poäng på skrivningen samt minst 2,3 respektive 4 uppgifter som bedömts med minst 2 poäng per uppgift.

Godkänd kontrollskrivning ht2015 *ger 3 poäng på uppgift 1–3 (som alltså inte behöver lösas). Markera detta genom att skriva* **"G" i rutorna för uppgifterna 1-3.**

Lösningsskiss finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen ses som ett höger ON-system när lämpligt.

1. Bestäm avståndet mellan punkten $(3,-2,2)$ och planet $x_1 - x_2 + x_3 = 1$ i $\mathbb{R}^3$.

2. Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 5 \\ 2x_1 - 2x_3 & = 4. \end{cases}$$

3. Låt $\overline{u} = (0,5,-2)$ och låt $\mathbb{W}$ vara det plan i $\mathbb{R}^3$ som på parameterform ges av
$$s(1,0,-1) + t(1,1,1) \quad s,t \in \mathbb{R}.$$
Bestäm $\overline{u}_{\|\mathbb{W}}$ (i $\mathbb{W}$) och $\overline{u}_{\perp\mathbb{W}}$ (ortogonal mot $\mathbb{W}$) sådana att $\overline{u} = \overline{u}_{\|\mathbb{W}} + \overline{u}_{\perp\mathbb{W}}$.

4. Bestäm en bas till delrummet $[(1,2,3,2),(0,1,8,5),(-2,-4,-6,-4)]$ till $\mathbb{R}^4$.

5. Bestäm avbildningsmatrisen i basen $\underline{f} = ((1,1) \quad (1,2))$ till den linjära avbildning $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som i standardbasen har matris
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Avgör om $(2,0,2)$ är en egenvektor till den linjära avbildning på $\mathbb{R}^3$ som i standardbasen har matris $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, och bestäm i så fall motsvarande egenvärde.

---

7. Bestäm det polynom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ som i minstakvadratmening bäst ansluter till

x	2	1	0	-1
y	6	-3	4	7

VÄND !

8. Låt $\mathbb{E}$ vara ett Euklidiskt rum med skalärprodukt $(\cdot|\cdot)$ och låt $F : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ vara en isometri (d.v.s. $|F(\overline{u})| = |\overline{u}|$ för alla $\overline{u} \in \mathbb{E}$).

   (a) Visa att
   $$(F(\overline{u})|F(\overline{v})) = (\overline{u}|\overline{v}) \text{ för alla } \overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{E}.$$
   (2p)

   (b) Visa att om $\underline{e}$ är en ON-bas till $\mathbb{E}$, då är matrisen A till F i denna bas en ON-matris (d.v.s. $A^tA = I$). (1p)

9. Låt
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$
   vara matris till den linjära avbildningen $F : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2$ i baserna $(1 \quad x \quad x^2 \quad x^3)$ respektive $(1 \quad x \quad x^2)$.

   (a) Bestäm en bas till nollrummet $N(F)$ till F. (2p)

   (b) Bestäm en bas till värderummet $V(F)$ till F. (1p)

10. Låt $\mathbb{W} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0\} \subset \mathbb{R}^4$.

    (a) Bestäm en ON-bas till $\mathbb{W}$. (2p)

    (b) Utvidga denna till en ON-bas till hela $\mathbb{R}^4$. (1p)

11. Lös systemet av differentialekvationer:
    $$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) + 2x_3(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) \\ x_3'(t) = 2x_3(t). \end{cases}$$

LYCKA TILL!

SVAR M.M., LINJÄR ALGEBRA, TATA24, 2016-03-29

1. Vektorn $\overline{u} = (3,-2,2) - (1,0,0) = (2,-2,2)$, mellan den givna punkten och en punkt i planet, projiceras på normalvektorn $\overline{n} = (1,-1,1)$ och ger avståndet $|\overline{u}_{\|\overline{n}}| = |(2,-2,2)| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Svar: $2\sqrt{3}$.

2. Ekvationssystemet kan lösas genom att sätta $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$. Man får sedan lösningarna $(x_1, x_2, x_3) = (2+t, 3-t, t)$, där $t \in \mathbb{R}$.

Svar: $(x_1, x_2, x_3) = (2+t, 3-t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

3. Normalen till planet ges av $\overline{n} = (1,0,-1) \times (1,1,1) = (1,-2,1)$, vilket ger

$$\overline{u}_{\perp\mathbb{W}} = \overline{u}_{\|\overline{n}} = \frac{(\overline{u}|\overline{n})}{|\overline{n}|^2}\overline{n} = \frac{(0,5,-2) \bullet (1,-2,1)}{6}(1,-2,1) = (-2,4,-2).$$

Vi får sedan att

$$\overline{u}_{\|\mathbb{W}} = \overline{u} - \overline{u}_{\perp\mathbb{W}} = (0,5,-2) - (-2,4,-2) = (2,1,0).$$

Svar: $\overline{u}_{\perp\mathbb{W}} = (-2,4,-2)$, $\overline{u}_{\|\mathbb{W}} = (2,1,0)$.

4. Vektorerna $(1,2,3,2)$ och $(0,1,8,5)$ bildar en bas för rummet eftersom de ej är parallella och vektorn $(-2,-4,-6,-4) = -2(1,2,3,2)$.

Svar: $\{(1,2,3,2),(0,1,8,5)\}$

5. Vi utnyttjar matrisrelationen $A_f = T^{-1}A_eT$, där A_e är den givna avbildningsmatrisen, T är basbytesmatrisen, och A_f den sökta avbildningsmatrisen i den nya basen. Vi får

$$A_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Svar: $\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

6. Matrisprodukten

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

visar att vektorn är en egenvektor med egenvärde 6.

Svar: Egenvärdet är 6.

7. Med värdena i den givna tabellen blir normalekvationerna $A^tAX = A^tY$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix},$$

vilket förenklas till ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 6 & 14 \\ 2 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 8 & 18 & 28 \end{array}\right),$$

med lösning $(a_0, a_1, a_2) = (1, -4, 3)$.

Svar: $p(x) = 1 - 4x + 3x^2$.

8. Se beviset för Sats 7.7.2 i boken.

9. Vi hittar baser för både $N(F)$ och $V(F)$ genom att lösa ekvationssystemet $AX = 0$, dvs

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Vi får lösningarna

$$\begin{cases} x_1 = -2s - 14t \\ x_2 = s + t \\ x_3 = 4s \\ x_4 = 4t. \end{cases}$$

Det följer att $N(F)$ har bas $\{-2 + x + 4x^2, -14 + x + 4x^3\}$, och att till exempel de två sista kolonnerna i matrisen A är löjliga element, dvs $V(F)$ har bas $\{1 + x + 2x^2, 2 - 2x + 4x^2\}$.

Svar: (a) Bas till $N(F)$ är $\{-2 + x + 4x^2, -14 + x + 4x^3\}$.
(b) Bas till $V(F)$ är $\{1 + x + 2x^2, 2 - 2x + 4x^2\}$.

10. Vi parametriserar ekvationen som beskriver $\mathbb{W}$ för att hitta linjärt oberoende vektorer som genererar $\mathbb{W}$,

$$x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2r + s + 2t \\ x_2 = r \\ x_3 = s \\ x_4 = t. \end{cases}$$

Sätt

$$\overline{f}_1 = \underline{e}\,\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{u}_2 = \underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{u}_3 = \underline{e}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi använder sedan Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod för att beräkna en ON-bas för $\mathbb{W}$. Med

$$\tilde{f}_2 = \overline{u}_2 - (\overline{u}_2 \bullet \overline{f}_1)\overline{f}_1 = \underline{e}\,\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

får vi den normerade basvektorn $\overline{f}_2 = \underline{e}\,\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vidare, med

$$\tilde{f}_3 = \overline{u}_3 - (\overline{u}_3 \bullet \overline{f}_1)\overline{f}_1 - (\overline{u}_3 \bullet \overline{f}_2)\overline{f}_2 = \underline{e}\,\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

får vi den sista normerade basvektorn $\overline{f}_3 = \underline{e}\,\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix}$. Vektorerna $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3$ bildar således en ON-bas för $\mathbb{W}$. Denna utvidgas till en ON-bas för hela $\mathbb{R}^4$ genom att sätta $\overline{f}_4 = \underline{e}\,\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\-2\end{pmatrix}$, dvs $\overline{f}_4 \in \mathbb{W}^\perp$.

Svar: (a) $\overline{f}_1 = \underline{e}\,\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overline{f}_2 = \underline{e}\,\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}1\\2\\5\\0\end{pmatrix}$, $\overline{f}_3 = \underline{e}\,\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix}$.

(b) $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3$ och $\overline{f}_4 = \underline{e}\,\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

11. Vi börjar med att hitta egenvärden och egenvektorer för koefficientmatrisen.

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & 0 & 2\\ 2 & 1-\lambda & -1\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix} = \ldots = (3-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda),$$

vilket ger egenvärdena $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Vi hittar motsvarande egenvektorer

$$\lambda = 1: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3-1 & 0 & 2 & 0\\ 2 & 1-1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2-1 & 0\end{array}\right),$$

vilket ger $(x_1, x_2, x_3) = (0, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$. Välj t.ex. $\overline{f}_1 = (0, 1, 0)$. På samma sätt fås $\overline{f}_2 = (-2, -5, 1)$ för egenvärdet 2, och $\overline{f}_3 = (1, 1, 0)$ för egenvärdet 3. I denna bas av egenvektorer blir avbildningsmatrisen (dvs koefficientmatrisen) en diagonalmatris med egenvärdena på diagonalen, och systemet av differentialekvationer blir efter basbytet ($X = TY$ med uppenbara beteckningar),

$$\begin{cases} y_1' = y_1\\ y_2' = 2y_2\\ y_3' = 3y_3.\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y_1 = Ae^t\\ y_2 = Be^{2t}\\ y_3 = Ce^{3t}.\end{cases}$$

där A, B och C är godtyckliga reella konstanter. Matrisrelationen $X = TY$ ger

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 1 & -5 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = Ae^t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + Be^{2t}\begin{pmatrix}-2\\-5\\1\end{pmatrix} + Ce^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},$$

dvs den allmänna lösningen är

$$\begin{cases} x_1(t) = -2Be^{2t} + Ce^{3t}\\ x_2(t) = Ae^t - 5Be^{2t} + Ce^{3t}\\ x_3(t) = Be^{2t}.\end{cases}$$

Svar: Lösningarna äro $x_1(t) = -2Be^{2t} + Ce^{3t}$, $x_2(t) = Ae^t - 5Be^{2t} + Ce^{3t}$, $x_3(t) = Be^{2t}$.