Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA24
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2016-01-11 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.

På uppgift 1–6 ska endast svar ges, och dessa kan lämnas på ett gemensamt papper. *Varje rätt svar ger 1 poäng, fel svar 0 poäng.*
Uppgift 7–11 ger maximalt 3 poäng per uppgift; fullständiga och välmotiverade lösningar krävs.
För betyg 3,4 respektive 5 räcker totalt 8, 12 respektive 16 poäng på skrivningen samt minst 2,3 respektive 4 uppgifter som bedömts med minst 2 poäng per uppgift.

Godkänd kontrollskrivning ht2015 *ger 3 poäng på uppgift 1–3 (som alltså inte behöver lösas). Markera detta genom att skriva* **"G" i rutorna för uppgifterna 1-3.**

Lösningsskiss finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen ses som ett höger ON-system när lämpligt.

1. Ange en normalform till det plan i $\mathbb{R}^3$ som på parameterform ges av $(x_1, x_2, x_3) = s(1,0,3) + t(2,1,-2), \quad s,t \in \mathbb{R}$.

2. Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 & = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = 3 \\ x_1 - x_3 & = 3 \end{cases}$$

3. Låt $\overline{u} = (1,2,3)$ och $\overline{v} = (-1,0,2)$. Bestäm $\overline{u}_{\parallel\overline{v}}$ (parallell med $\overline{v}$) och $\overline{u}_{\perp\overline{v}}$ (ortogonal mot $\overline{v}$) sådana att $\overline{u} = \overline{u}_{\parallel\overline{v}} + \overline{u}_{\perp\overline{v}}$.

4. Beräkna determinanten av $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

5. Bestäm en ON-bas till delrummet $[(1,1,1,1),(1,0,0,1)]$ till $\mathbb{R}^4$.

6. Avgör om $\lambda = 3$ är ett egenvärde till den linjära avbildning på $\mathbb{R}^3$ som i standardbasen har matris $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, och bestäm i så fall en bas till motsvarande egenrum.

---

7. Lös matrisekvationen $AX - X = A^2X + AB$ (med avseende på X) där
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

VÄND !

8. Låt $\mathbb{E}$ vara ett Euklidiskt rum och låt $\mathbb{U}$ vara ett delrum.

   (a) Visa att det ortogonala komplementet $\mathbb{U}^{\perp}$, bestående av mängden av alla vektorer som är ortogonala mot alla vektorer i $\mathbb{U}$, är ett delrum till $\mathbb{E}$. (2p)

   (b) Visa att representationen av en vektor $\overline{u} \in \mathbb{E}$ på formen $\overline{u} = \overline{v} + \overline{w}$ där $\overline{v} \in \mathbb{U}$ och $\overline{w} \in \mathbb{U}^{\perp}$ är entydig. (1p)

9. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

vara matris till den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ i standardbasen.

   (a) Bestäm en bas till nollrummet $N(F)$ till F. (1p)

   (b) Bestäm en bas till värderummet $V(F)$ till F. (1p)

   (c) Bestäm en bas till $N(F) \cap V(F)$. (1p)

10. Låt $\mathbb{W} = \{c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 : c_0 - c_1 + 2c_3 = 0\} \subset \mathbb{P}_3$.

   (a) Bestäm en bas till $\mathbb{W}$. (2p)

   (b) Utvidga denna till en bas till hela $\mathbb{P}_3$. (1p)

11. Ellipsoiden S i $\mathbb{R}^3$ ges av $Q(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2 = 3$. Bestäm det största och minsta avståndet mellan S och origo, samt ange i vilka punkter (uttryckta i det ursprungliga koordinatsystemet) som dessa värden antas.

LYCKA TILL!

SVAR M.M., LINJÄR ALGEBRA, TATA24, 2016-01-11

1. $(1,0,3) \times (2,1,-2) = (-3,8,1)$ ger normal, planet går genom origo.

Svar: $-3x_1 + 8x_2 + x_3 = 0$.

2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Svar: $(x_1, x_2, x_3) = (2, 0, -1)$.

3. $\overline{u}_{\|\overline{v}} = \dfrac{(\overline{u}|\overline{v})}{\|\overline{v}\|^2}\overline{v} = \dfrac{(1,2,3) \bullet (-1,0,2)}{5}(-1,0,2) = (-1,0,2)$.
$\overline{u}_{\perp\overline{v}} = \overline{u} - \overline{u}_{\|\overline{v}} = (1,2,3) - (-1,0,2) = (2,2,1)$.

Svar: $\overline{u}_{\|\overline{v}} = (-1,0,2)$, $\overline{u}_{\perp\overline{v}} = (2,2,1)$.

4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} =_{r2-r3, r1 \leftrightarrow r2} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 3.$$

Svar: 3.

5. $\overline{f}_1 = \dfrac{1}{2}(1,1,1,1)$, $\overline{u}_2 = \overline{v}_2 - (\overline{v}_2 \bullet \overline{f}_1)\overline{f}_1 = \ldots = \frac{1}{2}(1,-1,-1,1)$. $\overline{f}_2 = \dfrac{\overline{v}_2}{\|\overline{v}_2\|} = \dfrac{1}{2}(1,-1,-1,1)$

Svar: $(\overline{f}_1 \quad \overline{f}_2) = (\frac{1}{2}(1,1,1,1) \quad \frac{1}{2}(1,-1,-1,1))$.

6.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-3 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Egenrum: $(x_1, x_2, x_3) = (t, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$. Bas $((1,1,0))$.

Svar: 3 är ett egenvärde och bas till egenrummet är $((1,1,0))$.

7. $AX - X = A^2X + AB \Leftrightarrow (A - I - A^2)X = AB$.

$$A - I - A^2 = \ldots = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix},$$

$$AB = \ldots = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & -2 & 7 \\ -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Svar: $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

8. (a): Om $\overline{u} \in \mathbb{U}$, $\overline{v}, \overline{w} \in \mathbb{U}^\perp$ och $k \in \mathbb{R}$ så gäller:
$(\overline{u}|\overline{v}+\overline{w}) = (\overline{u}|\overline{v}) + (\overline{u}|\overline{w}) = 0+0 = 0$ så $\overline{v}+\overline{w} \in \mathbb{U}^\perp$.
$(\overline{u}|k\overline{v}) = k(\overline{u}|\overline{v}) = k0 = 0$, så $k\overline{v} \in \mathbb{U}^\perp$.
D.v.s. $\mathbb{U}^\perp$ är sluten både under addition och multiplikation med skalär, och är därför ett delrum.
V.S.B.

(b): Vi vet att $\overline{u} = \overline{u}_{\|\mathbb{U}} + \overline{u}_{\mathbb{U}^\perp} = \overline{v} + \overline{w}$. Men den sista likheten ger direkt att $\overline{u}_{\|\mathbb{U}} - \overline{v} = \overline{w} - \overline{u}_{\|\mathbb{U}^\perp}$. Då vänsterledet här ligger i $\mathbb{U}$ och högerledet i $\mathbb{U}^\perp$ är enda möjligheten att bägge är nollvektorn.
V.S.B.

9.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & x_3 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1-2x_2-x_3 \end{array}\right).$$

Så

$$N(F) = \left\{(x_1,x_2,x_3) : \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}\right\} = \left\{(x_1,x_2,x_3) : \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t \end{cases}\right\} = [(1,0,1)].$$

$$V(F) = [(1,0,1),(2,1,0)] = \{(x_1,x_2,x_3) : x_1 - 2x_2 - x_3 = 0\}.$$

I detta fall ser vi att $N(F) \subset V(F)$ eftersom vektorn $(1,0,1)$ ligger i båda. Annars kan vi se på:

$$N(F) \cap V(F) = \{(t,0,t) : t - 2\cdot 0 - t = 0\} = \{(t,0,t) : t \in \mathbb{R}\} = [(1,0,1)].$$

Svar: (a): bas till $N(F)$ är $((1,0,1))$.
(b): Bas till $V(F)$ är $((1,0,1) \quad (2,1,0))$.
(c): Bas till $N(F) \cap V(F)$ är $((1,0,1))$.

10.

$$\mathbb{W} = \left\{ \underline{p} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} : c_0 - c_1 + 2c_3 = 0 \right\}.$$

(a):

$$c_0 - c_1 + 2c_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c_0 = s - 2u \\ c_1 = s \\ c_2 = t \\ c_3 = u \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{p}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \underline{p}\begin{pmatrix} s-2u \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} =$$

$$= s\underline{p}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\underline{p}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\underline{p}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= s(1+x) + tx^2 + u(-2+x^3).$$

Svar: $(1+x \quad x^2 \quad -2+x^3)$.

(b): Välj vektor som ej uppfyller ekvationen $c_0 - c_1 + 2c_3 = 0$. T.ex. 1.

Svar: $(1+x \quad x^2 \quad -2+x^3 \quad 1)$.

11.

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = (3-\lambda)^2(9-\lambda).$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 9$.

$$\lambda = 3: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 5-3 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5-3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 5-3 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Välj (t.ex.) $\overline{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ och $\overline{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$ som är en ON-bas till detta egenrum.

$$\lambda = 9: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 5-9 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5-9 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 5-9 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$(x_1, x_2, x_3) = (t, t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Välj t.ex. $\overline{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.

Nu gäller att $\underline{f} = (\overline{f}_1 \quad \overline{f}_2 \quad \overline{f}_3)$ är en ON-bas i vilken ellipsoiden har ekvation

$$3y_1^2 + 3y_2^2 + 9y_3^2 = 3.$$

Maximala avståndet fås i de punkter som uppfyller $3y_1^2 + 3y_2^2 = 3$ och $y_3^2 = 0$. Avståndet är då 1. Det minimala avståndet fås i de punkter som uppfyller $y_1^2 + y_2^2 = 0$ och $9y_3^2 = 3$. Avståndet är då $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Svar: Det största avståndet är 1, och det antas på hela enhetscirkeln i $\overline{f}_1\overline{f}_2$-planet.
Det minsta avståndet är $1/\sqrt{3}$ och det antas i punkterna $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{f}_3$.