Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA24
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2013-03-22 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng och 8/12/16 poäng räcker för betyg 3/4/5. Godkänd kontrollskrivning ht2012 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas). Markera detta genom att skriva "G" i rutan för uppgift 1.

Lösningsskiss finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen ses som ett höger ON-system när lämpligt.

1. Bestäm skärningspunkten P mellan linjerna i $\mathbb{R}^3$ som på parameterform ges av

   $(1,2,1)+t(1,1,2)$ respektive $(1,4,2)+t(2,0,3)$.

   Bestäm sedan det kortaste avståndet mellan P och det plan som ges av

   $2x_1+x_2-x_3=-7$.

2. Låt $\mathbb{W}$ vara ett vektorrum och låt $F:\mathbb{W}\to\mathbb{W}$ vara linjär.

   (a) Ange definitionen av nollrummet $N(F)$ och värderummet $V(F)$ till F. (1p)

   (b) Antag att $N(F)\cap V(F)=\{\overline{0}\}$. Visa att varje vektor $\overline{w}\in\mathbb{W}$ på entydigt sätt kan skrivas på formen $\overline{w}=\overline{u}+\overline{v}$ där $\overline{u}\in N(F)$ och $\overline{v}\in V(F)$. (2p)

3. Bestäm den matris X som uppfyller $AX=B^{-1}X-C^t$ där

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&2\\1&3&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}6&-3&1\\-2&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-1&-2&-4\end{pmatrix}.$$

4. Bestäm det polynom $p(x)=a_0+a_1x$ som i minstakvadratmening bäst ansluter till nedanstående data:

x	-1	0	1	2	3
y	2	1	7	15	20

VÄND !

5. Låt $F : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{R}^3$ definieras av

$$F(c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3) = (c_0 + c_3, c_1 - c_2, c_0 + c_1 - c_2 + c_3).$$

   (a) Bestäm en bas till F:s nollrum $N(F)$. (2p)

   (b) Bestäm en bas till F:s värderum $V(F)$. (1p)

6. Låt

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 8x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

   Bestäm det största och minsta värdet som Q antar på mängden $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, samt ange i vilka punkter (uttryckta i det ursprungliga koordinatsystemet) dessa värden antas.

7. Vi vet att mängden av alla reella $n \times n$-matriser $\mathbb{M}_n$ (för fixt $n \geq 2$) utgör ett vektorrum. Avgör (bevisa eller motbevisa) om följande delmängder utgör ett underrum (delrum) till $\mathbb{M}_n$, samt ange i sådant fall deras dimension:

   (a) Mängden av alla diagonala $n \times n$-matriser. (1p)

   (b) Mängden av alla symmetriska $n \times n$-matriser. (1p)

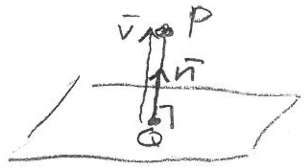
   (c) Mängden av alla diagonaliserbara $n \times n$-matriser. (1p)

LYCKA TILL!

TATA24 Linjär algebra 2013-03-22. Lösningsskiss

① Skärningspunkt mellan $(1,2,1)+t(1,1,2)$ och $(1,4,2)+s(2,0,3)$:

$$\begin{cases} 1+t = 1+2s \\ 2+t = 4 \\ 1+2t = 2+3s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ s=1 \end{cases}$$ ger punkten $P: (1,2,1)+2(1,1,2) = (3,4,5)$



Avstånd från P till planet $2x_1+x_2-x_3=-7$

Linje genom P ortogonal mot planet med $\bar{n} = \underline{e}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

är $(3,4,5)+t(2,1,-1)$. Skär planet då $2(3+2t)+(4+t)-(5-t)=-7$

$\Leftrightarrow 5+6t=-7 \Leftrightarrow t=-2$ d.v.s. Q ges av $(3,4,5)-2(2,1,-1)=(-1,2,7)$

och avståndet är $|\bar{v}| = |\overline{QP}| = |2\bar{n}| = 2\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2} = 2\sqrt{6}$

Alternativ: Ta R godt. i planet, t.ex. $R=(0,0,7)$. Då är $\overline{RP} = (3,4,5)-(0,0,7) =$
$= (3,4,-2)$ och $|\bar{v}| = |\overline{RP}_{/\!/\bar{n}}| = \left|\frac{\overline{RP}\bullet\bar{n}}{|\bar{n}|^2}\bar{n}\right| = \frac{|\overline{RP}\bullet\bar{n}|}{|\bar{n}|} = \frac{6+4+2}{\sqrt{6}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$

Svar: $P=(3,4,5)$, avstånd $=2\sqrt{6}$

---

② a) $F: W \to W$, nollrum $N(F) = \{\bar{u}\in W ; F(\bar{u})=\bar{0}\}$

värderum $V(F) = \{F(\bar{u})\in W, \bar{u}\in W\}$

b) Antag $\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_k$ bas för $N(F)$ ($k=\dim N(F)$) och
$\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_m$ bas för $V(F)$ ($m=\dim V(F)$). Dimensionssatsen
$\Rightarrow k+m = \dim W$

Antag $N(F)\cap V(F) = \{\bar{0}\}$. Beroendeekvationen för $\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_k,\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_m$:

$$\lambda_1\bar{u}_1+\dots+\lambda_k\bar{u}_k+\lambda_{k+1}\bar{v}_1+\dots+\lambda_{k+m}\bar{v}_m=\bar{0} \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\lambda_1\bar{u}_1+\dots+\lambda_k\bar{u}_k}_{\in N(F)} = \underbrace{-\lambda_{k+1}\bar{v}_1-\dots-\lambda_{k+m}\bar{v}_m}_{\in V(F)} \Rightarrow \text{båda leden} = \bar{0}$$

$\Rightarrow \lambda_j=0$ för alla $j=1,\dots,k+m$ ty $\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_k$ oberoende och $\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_m$ oberoende

$\Rightarrow \bar{u}_1,\dots,\bar{u}_k,\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_m$ oberoende $\Rightarrow$ bas för hela W ty rätt antal.

En godtycklig $\bar{w}\in W$ kan då entydigt skrivas

$$\bar{w} = \underbrace{\alpha_1\bar{u}_1+\dots+\alpha_k\bar{u}_k}_{\bar{u}}+\underbrace{\beta_1\bar{v}_1+\dots+\beta_m\bar{v}_m}_{\bar{v}} = \bar{u}+\bar{v},$$ där $\bar{u}\in N(F)$ och

$\bar{v}\in V(F)$ alltså är entydigt bestämda.

VSV

[enbart entydighet kan visas direkt: om $\bar{w}=\bar{u}+\bar{v}=\hat{u}+\hat{v}$ där
$\bar{u},\hat{u}\in N(F)$, $\bar{v},\hat{v}\in V(F)$ är $\underbrace{\bar{u}-\hat{u}}_{\in N(F)} = \underbrace{\hat{v}-\bar{v}}_{\in V(F)} \Rightarrow \bar{u}-\hat{u}=\bar{0}=\hat{v}-\bar{v} \Rightarrow \bar{u}=\hat{u}, \bar{v}=\hat{v}$]

(3) $AX = B^{-1}X - C^t \iff (A - B^{-1})X = -C^t$

$$(B|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}}_{B^{-1}}$$

$\Rightarrow A - B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ så ekv. blir

$IX = -C^t \iff X = -C^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

[Alt $AX = B^{-1}X - C^t \iff BAX = X - BC^t \iff (BA - I)X = -C^t$

Beräkning ger $BA - I = B$ så ekv. blir $BX = -BC^t \iff X = -C^t$]

Svar $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

---

(4) Vi vill lösa
$$\begin{cases} 2 = a_0 - a_1 \\ 1 = a_0 \\ 7 = a_0 + a_1 \\ 15 = a_0 + 2a_1 \\ 20 = a_0 + 3a_1 \end{cases}$$
dvs
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}}_{B}$$

Lösning på $AX = B$ saknas, minstakvadratlösning fås av normalekvationerna $A^tAX = A^tB \iff \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 45 \\ 95 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 5 & 45 \\ 5 & 15 & 95 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 5 & 45 \\ 0 & 10 & 50 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \iff \begin{array}{l} a_0 = 4 \\ a_1 = 5 \end{array}$$

Svar $p(x) = a_0 + a_1 x = 4 + 5x$

---

(5) a) $F(\overbrace{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3}^{p(x)}) = (c_0 + c_3, c_1 - c_2, c_0 + c_1 - c_2 + c_3) = (0,0,0) \iff$

$$\begin{cases} c_0 + c_3 = 0 \\ c_1 - c_2 = 0 \\ c_0 + c_1 - c_2 + c_3 = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$c_3 = t$, $c_2 = s$
$\Rightarrow c_1 = s$, $c_0 = -t$

$\Rightarrow p(x) = t(-1 + x^3) + s(x + x^2) \Rightarrow \dim N(F) = 2$ och en bas för $N(F)$ är $\{-1 + x^3, x + x^2\}$

b) $V(F) = [F(1), F(x), F(x^2), F(x^3)] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

samma

parallell

$\Rightarrow$ en bas för $V(F)$ är $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Svar Bas för $N(F)$: $\{-1 + x^3, x + x^2\}$, bas för $V(F)$: $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

⑥ $Q(x_1,x_2,x_3) = 8x_2^2+4x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3 = \underbrace{(x_1\ x_2\ x_3)}_{X^t}\underbrace{\begin{pmatrix}0&2&1\\2&8&2\\1&2&0\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}}_{X}$

Diagonalisera

$0 = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix}-\lambda&2&1\\2&8-\lambda&2\\1&2&-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2(8-\lambda)+4+4-(8-\lambda)+4\lambda+4\lambda = -\lambda^3+8\lambda^2+9\lambda =$
$= -\lambda(\lambda^2-8\lambda-9) = -\lambda(\lambda-9)(\lambda+1)$

Egenvärden $\lambda_1=9, \lambda_2=0, \lambda_3=-1 \Rightarrow$ i ny ON-bas $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$ med koordinater y_1, y_2, y_3 är $Q = Y^tDY = Y^t\begin{pmatrix}9&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}Y = 9y_1^2-y_3^2$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1 \Leftrightarrow y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$ och då detta gäller är

$Q_{max} = 9$ i $\pm\bar{f}_1$ och $Q_{min}=-1$ i $\pm\bar{f}_3$

$\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$ är egenvektorerna till $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

$\lambda_1=9: (A-9I)X=0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}-9&2&1&0\\2&-1&2&0\\1&2&-9&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}0&20&-80&0\\0&-5&20&0\\1&2&-9&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-9&0\\0&1&-4&0\\0&0&0&0\end{array}\right) \Rightarrow X = t\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$

$\bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{18}}\underline{e}\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$

$\lambda_3=-1: (A+I)X=0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\2&9&2&0\\1&2&1&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\0&5&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right) \Rightarrow X = t\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

$\bar{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

<u>Svar</u> $\underline{Q_{max} = 9 \text{ i } X = \pm\frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}}$, $\underline{Q_{min}=-1 \text{ i } X = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}$

---

⑦ M_n = mängden av $n\times n$-matriser $(n\geq 2)$

En delmängd U av M_n är ett underrum till M_n om
1) $A,B\in U \Rightarrow A+B\in U$, och 2) $A\in U, \alpha\in\mathbb{R} \Rightarrow \alpha A\in U$

a) U = diagonala matriser $A=\begin{pmatrix}a_1&&0\\&\ddots&\\0&&a_n\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}b_1&&0\\&\ddots&\\0&&b_n\end{pmatrix}, \alpha\in\mathbb{R} \Rightarrow$

$A+B = \begin{pmatrix}a_1+b_1&&0\\&\ddots&\\0&&a_n+b_n\end{pmatrix}\in U$, $\alpha A = \begin{pmatrix}\alpha a_1&&0\\&\ddots&\\0&&\alpha a_n\end{pmatrix}\in U \Rightarrow \underline{U \text{ underrum}}$

b) V = symmetriska matriser, $A=A^t, B=B^t, \alpha\in\mathbb{R} \Rightarrow$

$(A+B)^t = A^t+B^t = A+B$ och $(\alpha A)^t = \alpha A^t = \alpha A \Rightarrow A+B\in V$ och $\alpha A\in V$

$\Rightarrow \underline{V \text{ underrum}}$

c) $\underline{W}$ = diagonaliserbara matriser, $A=\begin{pmatrix}-1&0&\cdots&0\\0&0&&\\ \vdots&&\ddots&\\0&&&0\end{pmatrix}\in W$ ty redan diagonal

$B=\begin{pmatrix}1&1&0&\cdots&0\\0&0&0&&\\ \vdots&&&\ddots&\\0&&\cdots&&0\end{pmatrix}\in W$ ty $\lambda_1=1$ med egenvektor $\bar{e}_1$ och $\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$ med egenvektorer

$\bar{e}_1-\bar{e}_2, \bar{e}_3, \ldots, \bar{e}_n \Rightarrow$ bas av egenvektorer $\Leftrightarrow$ diagonaliserbar

$A+B=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&0&&\\ \vdots&&&&\vdots\\0&&\cdots&&0\end{pmatrix}$ har enda egenvärde $\lambda=0$ men inte en bas av egenvektorer, endast $n-1$ st. $\bar{e}_1, \bar{e}_3, \ldots, \bar{e}_n$ $\Rightarrow A+B$ ej diagonaliserbar $\Rightarrow \underline{W \text{ ej underrum}}$