Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA24
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2012-12-22 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng och 8/12/16 poäng räcker för betyg 3/4/5. Godkänd kontrollskrivning ht2012 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas). Markera detta genom att skriva "G" i rutan för uppgift 1.

Lösningsskiss finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen ses som ett höger ON-system när lämpligt.

1. Bestäm den matris X som uppfyller $A^t(X^t - A^tB) = B$ där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

2. Låt $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ vara vektorrum och låt $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ vara linjär.
   (a) Ange definitionen av att F är inverterbar. (1p)
   (b) Antag att $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ är en linjär och inverterbar avbildning samt att $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n$ är en bas till $\mathbb{V}$. Visa att $F(\overline{v}_1), F(\overline{v}_2), \ldots, F(\overline{v}_n)$ är en bas till $\mathbb{W}$. (2p)

3. Låt $\Pi = \{(s, t, s + 2t) : s, t \in \mathbb{R}\}$ och $P = (4, 8, 2)$ vara ett plan respektive en punkt i $\mathbb{R}^3$. Bestäm det kortaste avståndet mellan P och Π samt ange den punkt S i Π som ger det minsta avståndet till P.

4. Visa att den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som i standardbasen har matris

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

är en isometri samt beskriv den.

VÄND !

5. Låt $\underline{p} = (1 \quad 1+x \quad x+x^2 \quad x^3)$ vara en bas till $\mathbb{P}_3$. Låt vidare $F : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ definieras av

$$F(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3) = 2c_2 + 6c_3 x.$$

Bestäm F:s matris i basen $\underline{p}$.

6. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ har i standardbasen matris

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm en ON-bas till F:s värderum, samt utvidga denna till en ON-bas till hela $\mathbb{R}^4$.

7. Bestäm det största och minsta avståndet mellan origo och den yta i $\mathbb{R}^3$ som ges av

$$5x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 4x_2x_3 + 3x_3^2 = 1,$$

samt ange i vilka punkter dessa värden antas.

LYCKA TILL!

TATA24 Linjär algebra 2012-12-22. Lösningsskiss

① $A^t(X^t - A^tB) = B \underset{\text{om } A^{-1} \text{ existerar}}{\iff} X^t - A^tB = (A^t)^{-1}B \iff$

$\iff X^t = (A^t + (A^t)^{-1})B$

Bestäm $(A^t)^{-1}$: $(A^t \mid I) = \overset{\text{(-1)}}{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \underset{\text{(-1)}}{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$

$\sim \overset{\text{(-1)}}{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ (så $(A^t)^{-1}$ existerar)

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I} \quad \underbrace{\begin{matrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{(A^t)^{-1}}$$

$$\Rightarrow X^t = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 6 & 12 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ <u>Svar</u> $X = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 8 \\ 14 & 12 & 16 \end{pmatrix}$

---

②a) $F: V \to W$ är inverterbar om det finns $G: W \to V$ så att $G(F(\bar{v})) = \bar{v}$ för alla $\bar{v} \in V$ och $F(G(\bar{w})) = \bar{w}$ för alla $\bar{w} \in W$.

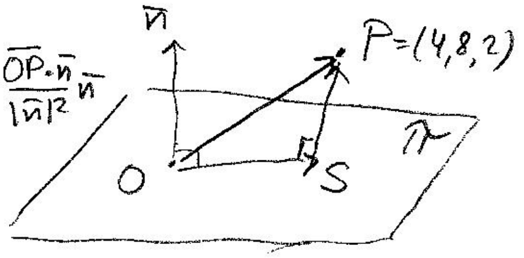
b) Låt $\bar{w} \in W$ godtycklig och betrakta ekvationen:

$$\lambda_1 F(\bar{v}_1) + \lambda_2 F(\bar{v}_2) + \ldots + \lambda_n F(\bar{v}_n) = \bar{w} \quad \overset{F \text{ linjär}}{\iff}$$
$$F(\lambda_1 \bar{v}_1 + \lambda_2 \bar{v}_2 + \ldots + \lambda_n \bar{v}_n) = \bar{w} \quad \overset{F \text{ inverterbar}}{\iff}$$
$$\lambda_1 \bar{v}_1 + \lambda_2 \bar{v}_2 + \ldots + \lambda_n \bar{v}_n = F^{-1}(\bar{w})$$

som har entydig lösning eftersom $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ bildar bas för V. Alltså kan varje $\bar{w} \in W$ entydigt skrivas som en linjärkombination av $F(\bar{v}_1), F(\bar{v}_2), \ldots, F(\bar{v}_n)$ som därför bildar en bas för W.

(Med $\bar{w} = \bar{0}$ visar resonemanget att $F(\bar{v}_1), \ldots, F(\bar{v}_n)$ är linjärt oberoende. Lösbarhet för godtyckligt $\bar{w}$ visar att $F(\bar{v}_1), \ldots, F(\bar{v}_n)$ spänner upp W)

③ Vi har $\overline{OS} = \overline{OP}_{/\!/\pi} = \overline{OP} - \overline{OP}_{/\!/\bar{n}} = \overline{OP} - \frac{\overline{OP}\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|^2}\bar{n}$



Avstånd P till S är $d = |\overline{SP}| = |\overline{OP}_{/\!/\bar{n}}|$

$$(s,t,s+2t) = s\underbrace{(1,0,1)}+t\underbrace{(0,1,2)}_{\text{vektorer i planet}}$$

$$\bar{n} = \underline{e}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \times \underline{e}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$$ är normal till planet

$$\Rightarrow \overline{OP}_{/\!/\bar{n}} = \frac{\overline{OP}\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|^2}\bar{n} = \frac{4\cdot(-1)+8(-2)+2\cdot 1}{(-1)^2+(-2)^2+1^2}(-1,-2,1) = -3(-1,-2,1) = (3,6,-3)$$

$$\Rightarrow d = |(3,6,-3)| = 3|(1,3,-1)| = 3\sqrt{6}$$ och

$$\overline{OS} = (4,8,2)-(3,6,-3) = (1,2,5)$$

Svar Avståndet från P till π är $3\sqrt{6}$ och $S=(1,2,5)$

[Alternativt: Beräkna $\overline{OS} = \overline{OP}_{/\!/\pi}$ genom projektionsformeln
$\overline{OP}_{/\!/\pi} = (\overline{OP}\cdot\bar{v}_1)\bar{v}_1 + (\overline{OP}\cdot\bar{v}_2)\bar{v}_2$ där $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ ON-bas för π]

---

④ $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ges av $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1\\ 1 & -\sqrt{3}\end{pmatrix}$ i standardbasen (ON-bas).

$A^tA = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1\\ 1 & -\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1\\ 1 & -\sqrt{3}\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix} = I \Rightarrow A^t = A^{-1}$ vilket är ekvivalent med att F är en isometri (ty A är F:s matris i ON-bas).

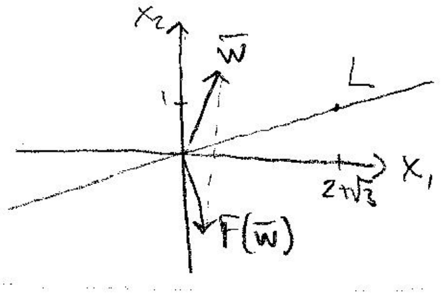
$\det A = \frac{1}{4}(-3-1) = -1 \Rightarrow$ A spegling (i linje)

$\bar{u} = \underline{e}X$ längs linjen $\Leftrightarrow F(\bar{u}) = \bar{u} \Leftrightarrow AX = X \Leftrightarrow (A-I)X = 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c}\frac{\sqrt{3}}{2}-1 & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}-1 & 0\end{array}\right)\begin{matrix}\cdot 2\\ \cdot 2\end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c}\sqrt{3}-2 & 1 & 0\\ 1 & -\sqrt{3}-2 & 0\end{array}\right)\boxed{2-\sqrt{3}} \sim \left(\begin{array}{cc|c}0 & 0 & 0\\ 1 & -\sqrt{3}-2 & 0\end{array}\right) \Rightarrow X = t\begin{pmatrix}2+\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}$$

[$\bar{v} = \underline{e}X$ normal till linjen $\Leftrightarrow F(\bar{v}) = -\bar{v} \Leftrightarrow (A+I)X = 0$]

Linjen L kan skrivas $\begin{cases}x_1 = (2+\sqrt{3})t\\ x_2 = t\end{cases}$ eller $x_2 = \frac{x_1}{2+\sqrt{3}}$



Svar F är spegling i linjen $x_2 = \frac{x_1}{2+\sqrt{3}}$

⑤ $\underline{p} = (1, 1+x, x+x^2, x^3)$ bas för P_3.

$F(c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3) = 2c_2 + 6c_3x$. F:s matris A_p i $\underline{p}$ fås genom bilderna av baselementen.

$F(1) = 0 = \underline{p}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $F(1+x) = 0 = \underline{p}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $F(x+x^2) = 2 = 2\cdot1 = \underline{p}\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

$F(x^3) = 6x = -6\cdot1 + 6\cdot(1+x) = \underline{p}\begin{pmatrix}-6\\6\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow A_p = \begin{pmatrix}0&0&2&-6\\0&0&0&6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

[Alt. I standardbasen $\underline{e} = (1, x, x^2, x^3)$ är matrisen $A_e = \begin{pmatrix}0&0&2&0\\0&0&0&6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\underline{p} = \underline{e}T = \underline{e}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ och $A_p = T^{-1}A_eT$ där $T^{-1} = \begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$]

<u>Svar:</u> $A_p = \begin{pmatrix}0&0&2&-6\\0&0&0&6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ [Obs att $F = \frac{d^2}{dx^2}$, derivering 2 gånger]

---

⑥ V(F) spänns upp av A:s kolonner (i standardbasen $\underline{e}$)

$\Rightarrow V(F) = [\underbrace{(1,1,0,0)}_{=\bar{v}_1}, \underbrace{(2,0,0,0)}_{=\bar{v}_2}, \underbrace{(1,1,1,1)}_{=\bar{v}_3}]$.

En ON-bas för V(F) fås genom Gram-Schmidt:

$\bar{u}_1 = \frac{\bar{v}_1}{|\bar{v}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)$; $\bar{u}_2 = \frac{\bar{w}_2}{|\bar{w}_2|}$ där $\bar{w}_2 = \bar{v}_2 - (\bar{v}_2\cdot\bar{u}_1)\bar{u}_1 =$

$= (2,0,0,0) - \frac{1}{2}\cdot2(1,1,0,0) = (1,-1,0,0) \Rightarrow \bar{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)$;

$\bar{u}_3 = \frac{\bar{w}_3}{|\bar{w}_3|}$ där $\bar{w}_3 = \bar{v}_3 - (\bar{v}_3\cdot\bar{u}_1)\bar{u}_1 - (\bar{v}_3\cdot\bar{u}_2)\bar{u}_2 =$

$= (1,1,1,1) - \frac{1}{2}\cdot2(1,1,0,0) - \frac{1}{2}\cdot0(1,-1,0,0) = (0,0,1,1) \Rightarrow \bar{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1)$

$\Rightarrow \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ ON-bas för V(F)

[Alt: $(1,0,0,0), (0,1,0,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1)$ är ON-bas för V(F)]

ON-bas för $\mathbb{R}^4$, ta t.ex. $\bar{v}_4 = (0,0,0,1)$ och

$\bar{w}_4 = \bar{v}_4 - (\underbrace{\bar{v}_4\cdot\bar{u}_1}_{0})\bar{u}_1 - (\underbrace{\bar{v}_4\cdot\bar{u}_2}_{0})\bar{u}_2 - (\underbrace{\bar{v}_4\cdot\bar{u}_3}_{1/\sqrt{2}})\bar{u}_3 = (0,0,0,1) - \frac{1}{2}(0,0,1,1) = \frac{1}{2}(0,0,-1,1)$

$\Rightarrow \bar{u}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,-1,1)$ fjärde vektor i ON-bas [$\bar{u}_4$ kan ses utan beräkning]

<u>Svar</u> ON-bas för V(F): $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1)$.

Utökas med $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,-1,1)$ till ON-bas för $\mathbb{R}^4$.

⑦ $Q = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 4x_2x_3 + 3x_3^2 = X^tAX$ där

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ och $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = A^t$ Diagonalisera!

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(4-\lambda)(3-\lambda) \underbrace{-4(5-\lambda)-4(3-\lambda)}_{=-4(8-2\lambda)=-8(4-\lambda)} =$$

$$= (4-\lambda)\left[(5-\lambda)(3-\lambda)-8\right] = (4-\lambda)\underbrace{(\lambda^2-8\lambda+7)}_{=0 \text{ för } \lambda=4\pm3} = (4-\lambda)(\lambda-7)(\lambda-1) = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = 1$

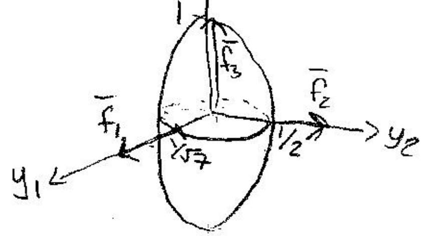
$\Rightarrow$ I ny ON-bas $\underline{f}$ med koordinater $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ är

$$Q = Y^tDY = Y^t\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}Y = 7y_1^2 + 4y_2^2 + y_3^2$$

$Q = 1$ är en <u>ellipsoid</u> med halvaxlar $\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{2}$ och 1

Största avstånd till origo är 1 i punkterna $Y = \pm\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Minsta avstånd är $\frac{1}{\sqrt{7}}$ i $Y = \pm\frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



X-koordinaterna fås med hjälp av egenvektorerna

$\underline{\lambda_3 = 1}$ $(A-I)X = 0$ $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & | & 0 \\ 2 & 3 & -2 & | & 0 \\ 0 & -2 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot\frac{1}{2} \\ \\ \cdot\frac{1}{2} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 2 & 3 & -2 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$

$x_1 = -t \Rightarrow x_2 = x_3 = 2t \quad \Rightarrow X = t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\bar{f}_3 = \frac{1}{3}\underline{e}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ normerad egenvektor

$\underline{\lambda_1 = 7}$ $(A-7I)X = 0$ $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & | & 0 \\ 2 & -3 & -2 & | & 0 \\ 0 & -2 & -4 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & -4 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\bar{f}_1 = \frac{1}{3}\underline{e}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\left[\lambda_2 = 4 \text{ ger } t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$

Största avstånd i $\pm\bar{f}_3$, minsta i $\pm\frac{1}{\sqrt{7}}\bar{f}_1$

<u>Svar</u> Största avstånd är 1 i $\pm\frac{1}{3}(-1,2,2)$

Minsta avstånd är $\frac{1}{\sqrt{7}}$ i $\pm\frac{1}{3\sqrt{7}}(2,2,-1)$