Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA24
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2012-08-18 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng och 8/12/16 poäng räcker för betyg 3/4/5. Godkänd kontrollskrivning ht2011 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas). Markera detta genom att skriva "G" i rutan för uppgift 1.

Lösningsskiss finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen ses som ett höger ON-system när lämpligt.

1. Bestäm den matris X som uppfyller $A^{-1}XB^t = C^t$ där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Låt $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ vara vektorrum och låt $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ vara linjär.

   (a) Ange definitionen av F:s värderum $V(F)$. (1p)

   (b) Visa att
   $\mathbb{V} = [\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_k] \Rightarrow V(F) = [F(\overline{v}_1), F(\overline{v}_2), \ldots, F(\overline{v}_k)]$. (1p)

   (c) Bestäm $V(F)$ ifall $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges av
   $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + 2x_2 + 2x_3)$. (1p)

3. Linjerna L_1, L_2 och L_3 i $\mathbb{R}^3$ ges av

$$(x_1, x_2, x_3) = (0, 2, 1) + t(1, -1, 1), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2, x_3) = (2, 0, 2) + t(-1, 1, 0), \quad t \in \mathbb{R},$$

respektive

$$(x_1, x_2, x_3) = (0, 2, 5) + t(-1, 1, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Visa att L_1, L_2 och L_3 ligger i ett gemensamt plan, samt beräkna arean av den triangel som dessa begränsar i detta plan.

4. Bestäm det polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ som i minstakvadratmening bäst ansluter till nedanstående data:

x	-2	0	1	3
y	2	-4	9	15

VÄND !

5. Låt
$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$
Bestäm det största och minsta värdet som Q antar på mängden $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, samt ange i vilka punkter (uttryckta i det ursprungliga koordinatsystemet) dessa värden antas.

6. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ har i standardbasen matris
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Bestäm en ON-bas till $\mathbb{R}^4$ bestående av egenvektorer till F. (2p)

   (b) Beräkna A^5. (1p)

7. Låt A vara en $n \times n-$matris. Givet ett polynom $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k$ så definierar vi matrisen $p(A) = a_0I + a_1A + \ldots + a_kA^k$ (där I är $n \times n-$identitetsmatrisen).

   (a) Visa att om λ är ett egenvärde till A så är $p(\lambda)$ ett egenvärde till $p(A)$. (1p)

   (b) Visa att om A är diagonaliserbar så är även $p(A)$ diagonaliserbar. (2p)

   (För att ge mening åt begreppen egenvärde/egenvektor och diagonaliserbarhet för en matris identifierar vi ovan en sådan med motsvarande linjära avbildning på $\mathbb{R}^n$ som har denna som matris i standardbasen.)

LYCKA TILL!

Lösningsförslag, TATA 24, 2012-08-18

1. $A^{-1}XB^t = C^t \iff X = AC^t(B^t)^{-1}$

Bestäm $(B^t)^{-1}$:

$$\left(\underbrace{\begin{matrix}1&1&1\\1&0&1\\0&-1&1\end{matrix}}_{B^t}\left|\underbrace{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}}_{I}\right.\right) \sim \left(\begin{matrix}1&1&1\\0&-1&0\\0&-1&1\end{matrix}\left|\begin{matrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right.\right) \sim \left(\begin{matrix}1&1&1\\0&-1&0\\0&0&1\end{matrix}\left|\begin{matrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&-1&1\end{matrix}\right.\right)\cdot(-1) \sim \left(\underbrace{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}}_{I}\left|\underbrace{\begin{matrix}-1&2&-1\\1&-1&0\\1&-1&1\end{matrix}}_{(B^t)^{-1}}\right.\right)$$

$\Rightarrow$

$$X = \underbrace{\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-2&1\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}1&-3&1\\3&1&-2\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}-1&2&-1\\1&-1&0\\1&-1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3&4&0\\-4&7&-5\end{pmatrix}$$

Svar: $X = \begin{pmatrix}-3&4&0\\-4&7&-5\end{pmatrix}$

---

2. a) $V(F) = \{F(\bar v)\in W : \bar v \in V\}$

b) $\bar v \in V \Rightarrow \bar v = \alpha_1\bar v_1 + \dots + \alpha_k \bar v_k$ för några $\alpha_1,\dots,\alpha_k \Rightarrow$

$F(\bar v) = F(\alpha_1\bar v_1 + \dots + \alpha_k\bar v_k) \underset{F \text{ linjär}}{=} \alpha_1 F(\bar v_1) + \dots + \alpha_k F(\bar v_k)$,

d.v.s. $F(\bar v) \in [F(\bar v_1),\dots,F(\bar v_k)]$. V.S.V.

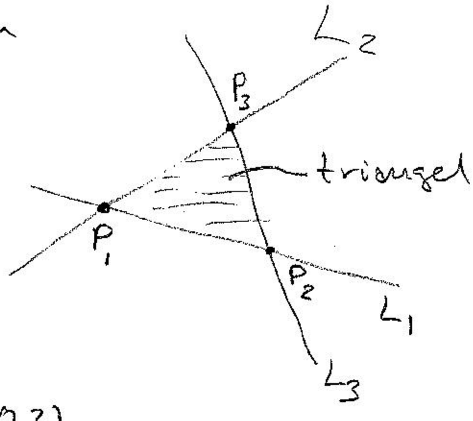
c) $\mathbb{R}^3 = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)] \Rightarrow V(F) = [F(1,0,0), F(0,1,0), F(0,0,1)] =$

$= [(1,1,2),(1,1,2),(1,1,2)] = [(1,1,2)]$ Svar: $V(F) = [(1,1,2)]$

(geometriskt linjen $t(1,1,2)$, $t\in\mathbb{R}$)

---

3. L_1, L_2 och L_3 ligger i ett gemensamt plan om de skär varandra parvis (ty de är inte parallella)



Sök P_1, skärning mellan L_1 och L_2:

$$\begin{cases}0+t = 2-s\\2-t = s\\1+t = 2\end{cases} \iff \begin{cases}t=1\\s=1\end{cases} \text{ ger } P_1 = (1,1,2)$$

P_2 (L_1 och L_3): $\begin{cases}0+t = -r\\2-t = 2+r\\1+t = 5+r\end{cases} \iff \begin{cases}t=2\\r=-2\end{cases}$ ger $P_2 = (2,0,3)$

P_3 (L_2 och L_3): $\begin{cases}2-s = -r\\s = 2+r\\2 = 5+r\end{cases} \iff \begin{cases}s=-1\\r=-3\end{cases}$ ger $P_3 = (3,-1,2)$

Skärningspunkten i alla 3 fallen $\Rightarrow$ linjerna ligger i gemensamt plan V.S.V.

Arean av triangeln är

$$A = \frac12|\overline{P_1P_2}\times\overline{P_1P_3}| = \frac12\left|\underline{e}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\times\underline{e}\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}\right| = \frac12\left|\underline{e}\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\right| = \frac12\sqrt{2^2+2^2+0^2} = \sqrt2$$

Svar: Arean $=\sqrt2$ (a.e)

④ $y=p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ med insatta x- och y-värden ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} a_0-2a_1+4a_2=2 \\ a_0 =-4 \\ a_0+a_1+a_2=9 \\ a_0+3a_1+9a_2=15 \end{cases} \iff$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix}}_{B}$$

$AX=B$ saknar lösning. Minstakvadratlösn. ges av normalekv. $A^tAX=A^tB$

$$A^tA=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 14 \\ 2 & 14 & 20 \\ 14 & 20 & 98 \end{pmatrix}, \quad A^tB=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 22 \\ 50 \\ 152 \end{pmatrix}$$

$A^tAX=A^tB$ ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 14 & 22 \\ 2 & 14 & 20 & 50 \\ 14 & 20 & 98 & 152 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 10 & 25 \\ 2 & 1 & 7 & 11 \\ 7 & 10 & 49 & 76 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 10 & 25 \\ 0 & -13 & -13 & -39 \\ 0 & -39 & -21 & -99 \end{array}\right) \cdot \tfrac{-1}{13} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 10 & 25 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 18 & 18 \end{array}\right) \Rightarrow a_2=1 \quad \Rightarrow a_1=3-a_2=2 \quad \Rightarrow a_0=25-7a_1-10a_2=1$$

$\Rightarrow p(x)=1+2x+x^2$

Svar $p(x)=1+2x+x^2$

---

⑤ $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-2x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3=\underbrace{(x_1\ x_2\ x_3)}_{X^t}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X}$

Diagonalisera:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)^2(-2-\lambda)-2-2-(1-\lambda)-(1-\lambda)-4(-2-\lambda)=$$
$$=-\lambda^3+9\lambda=-\lambda(\lambda^2-9)=-\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)=0$$

$\Rightarrow \lambda_1=3,\ \lambda_2=0,\ \lambda_3=-3 \Rightarrow$ I ny ON-bas $\underline{f}=\underline{e}T$ kan Q med $X=TY$ skrivas

$$Q=Y^tDY=Y^t\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}Y=3y_1^2-3y_3^2$$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1 \iff y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$ och för sådana Y är

$Q_{max}=3$ för $Y=\begin{pmatrix} \pm1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $Q_{min}=-3$ för $Y=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm1 \end{pmatrix}$

X-koord fås av normerade egenvektorer till $\lambda=3$ och $\lambda=-3$

$\lambda=3$ $(A-3I)X=0$ ger $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{f}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda=-3$ $(A+3I)X=0$ ger $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{f}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\underline{e}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Svar $Q_{max}=3$ i $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$, $Q_{min}=-3$ i $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)$

(6) a) $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{utv.}\\ \text{längs}\\ \text{kolonn 1}}}{=} (-1)^{1+1}(-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(-2)\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$

$= -\lambda\left[-\lambda(1-\lambda)^2+\lambda\right] - 2\left[-2+2(1-\lambda)^2\right] = -\lambda(-\lambda^3+2\lambda^2) - 2(2\lambda^2-4\lambda) = \lambda^3(\lambda-2) - 4\lambda(\lambda-2) =$

$= \lambda(\lambda-2)\left[\lambda^2-4\right] = \lambda(\lambda-2)^2(\lambda+2) = 0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=0,\ \lambda_4=-2$

Egenvektorer:

$\lambda_1=\lambda_2=2$ $\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ ger $t\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\bar f_1 = \underline{e}\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$ och $\bar f_2 = \underline{e}\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ är normerade och inbördes ortogonala

$\lambda_3=0$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ ger $t\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$, ta $\bar f_3 = \underline{e}\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$

$\lambda_4=-2$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ ger $t\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, ta $\bar f_4 = \underline{e}\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \underline{f} = (\bar f_1, \bar f_2, \bar f_3, \bar f_4)$ ON-bas av egenvektorer

b) Med $T = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ är $A = TDT^{-1} = TDT^t$ och

$A^5 = TD^5T^t = T\underbrace{\begin{pmatrix} 32 & & & \\ & 32 & & \\ & & 0 & \\ & & & -32 \end{pmatrix}}_{=16D}T^t = 16TDT^t = 16A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -32 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 16 \\ -32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

Svar $\underline{e}\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \underline{e}\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \underline{e}\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \underline{e}\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ är ON-bas av egenvektorer till A

$A^5 = 16A$

---

(7) a) Antag $A\bar v = \lambda\bar v \Rightarrow A^m\bar v = A^{m-1}(A\bar v) = A^{m-1}(\lambda\bar v) = \lambda(A^{m-1}\bar v) = \lambda A^{m-2}(A\bar v) =$
$= \lambda A^{m-2}(\lambda\bar v) = \lambda^2 A^{m-2}\bar v = \ldots$ /på samma sätt/ $= \lambda^m\bar v$. Detta ger

$p(A)\bar v = (a_0 I + a_1 A + \ldots + a_k A^k)\bar v = a_0 I\bar v + a_1 A\bar v + \ldots + a_k A^k\bar v =$
$= a_0\bar v + a_1\lambda\bar v + \ldots + a_k\lambda^k\bar v = (a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_k\lambda^k)\bar v = p(\lambda)\bar v$

$\Rightarrow p(\lambda)$ egenvärde till $p(A)$ (och med samma egenvektor $\bar v$ som för A) V.S.V.

b) A diagonaliserbar $\Leftrightarrow$ det finns en bas (för $\mathbb{R}^n$) $\bar v_1, \ldots, \bar v_n$ av egenvektorer till A
Enligt ovan är dessa också egenvektorer till $p(A)$ så det finns en bas (för $\mathbb{R}^n$) av egenvektorer till $p(A)$ $\Leftrightarrow$ $p(A)$ diagonaliserbar
V.S.V.