Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA24
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2012-04-10 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng och 8/12/16 poäng räcker för betyg 3/4/5. Godkänd kontrollskrivning ht2011 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas). Markera detta genom att skriva "G" i rutan för uppgift 1.

Lösningsskiss finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen ses som ett höger ON-system när lämpligt.

1. Bestäm den matris X som uppfyller $(A + A^t)A^{-1}X = A^t$ där
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Låt $\mathbb{U}$ vara en delmängd till vektorrummet $\mathbb{V}$. Ange definitionen av att $\mathbb{U}$ är ett underrum (delrum) till $\mathbb{V}$.
   (b) Låt $\mathbb{V}$ och $\mathbb{W}$ vara vektorrum och låt $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ vara en linjär avbildning. Visa att mängden $N(F)$ bestående av alla $\overline{v} \in \mathbb{V}$ sådana att $F(\overline{v}) = \overline{0}$ är ett underrum till $\mathbb{V}$.
   (c) Avgör om $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$ är ett underrum till $\mathbb{R}^3$.

3. Låt $\Pi_1 = \{(s, t, 2s - t) : s, t \in \mathbb{R}\}$ vara ett plan i $\mathbb{R}^3$. Ange en ekvation på normalform för det plan Π_2 som inte skär Π_1 och som går genom punkten $(1, 1, 0)$. Ange även avståndet mellan Π_1 och Π_2.

4. Låt $p_1(x) = 1 + x + x^2 - x^3$, $p_2(x) = 3 + x - 2x^3$, $p_3(x) = 1 - x^3$, $p_4(x) = 1 - x - 2x^2$. Bestäm en bas till $\mathbb{P}_3$ som innehåller så många av dessa fyra polynom som möjligt.

VÄND !

5. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ har i standardbasen matris

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestäm en ON-bas till $\mathbb{R}^4$ bestående av egenvektorer till F.

6. Lös systemet av differentialekvationer:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) - x_3(t) \\ x_2'(t) = -x_1(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) = -x_1(t) + x_2(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 2 \\ x_3(0) = 1. \end{cases}$$

7. En delmängd $K \subset \mathbb{R}^n$ kallas konvex om det för alla $\overline{u}_1, \overline{u}_2 \in K$ och $t \in (0,1)$ gäller att $(1-t)\overline{u}_1 + t\overline{u}_2 \in K$. Vektorn $\overline{u} \in K$ kallas en extrempunkt till K om det enda sättet att skriva $\overline{u} = (1-t)\overline{u}_1 + t\overline{u}_2$ där $\overline{u}_1, \overline{u}_2 \in K$ och $t \in (0,1)$ är med $\overline{u}_1 = \overline{u}_2 = \overline{u}$.

Låt

$$K = \{(x_1, x_2) : x_2 \geq 0, \quad x_2 - x_1 \leq 1, \quad x_1 + x_2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Visa att K är konvex samt bestäm alla extrempunkter till K.

LYCKA TILL!

Lösningsförslag, TATA24, 2012-04-10

① Om $A+A^t$ är inverterbar är $(A+A^t)A^{-1}X = A^t \Leftrightarrow$
$A^{-1}X = (A+A^t)^{-1}A^t \Leftrightarrow X = A(A+A^t)^{-1}A^t$

Beräkning av $(A+A^t)^{-1}$: $A+A^t = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&1\\1&1&2\end{pmatrix}$

$$\textcircled{-2}\,\textcircled{-1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&1&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\1&1&2&0&0&1\end{array}\right) \sim \textcircled{-1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&-1&1&-2&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&1&0&-1&1\end{array}\right) \overset{\times}{\sim} \textcircled{-\tfrac{1}{2}}\,\textcircled{\tfrac{1}{2}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&-1&1&-2&0\\0&0&2&-1&1&1\end{array}\right)\cdot\tfrac{1}{2} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/2&1/2&-1/2\\0&1&0&1/2&-3/2&1/2\\0&0&1&-1/2&1/2&1/2\end{array}\right) \Rightarrow (A+A^t)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-3&1\\-1&1&1\end{pmatrix} \text{ och}$$

(the right block marked $\underbrace{\quad}_{(A+A^t)^{-1}}$)

$$X = A(A+A^t)^{-1}A^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-2&0\\-1&1&1\\0&2&0\end{pmatrix}A^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&2\\0&1&0\\2&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1/2&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

<u>Svar:</u> $X = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1/2&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

---

② a) U är ett underrum av vektorrummet V om U är en icke-tom delmängd av V och själv ett vektorrum med samma addition och multiplikation med skalär som i V.

b) Det räcker att visa att $\begin{cases} i)\ \bar{u},\bar{v} \in N(F) \Rightarrow \bar{u}+\bar{v} \in N(F) \\ ii)\ \bar{u} \in N(F), \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha\bar{u} \in N(F)\end{cases}$

i) $\bar{u},\bar{v} \in N(F) \Rightarrow F(\bar{u}+\bar{v}) \underset{\uparrow}{=} F(\bar{u})+F(\bar{v}) = \bar{0}+\bar{0} = \bar{0} \Rightarrow \bar{u}+\bar{v} \in N(F)$

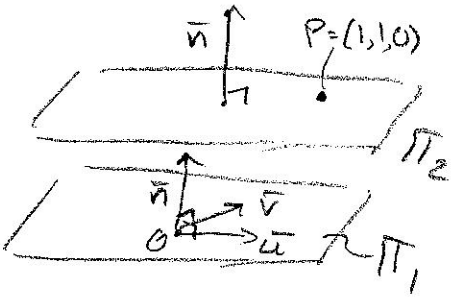
F linjär

ii) $\bar{u} \in N(F), \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow F(\alpha\bar{u}) \overset{\downarrow}{=} \alpha F(\bar{u}) = \alpha\bar{0} = \bar{0} \Rightarrow \alpha\bar{u} \in N(F)$

$\Rightarrow$ För $F: V \to W$ linjär är $N(F)$ ett underrum av V.

c) Nollelementet måste tillhöra alla underrum eftersom de är vektorrum. Då $0+0+0 \neq 1$ gäller att $(0,0,0) \notin \{(x_1,x_2,x_3) : x_1+x_2+x_3=1\}$ så mängden är inte ett underrum av $\mathbb{R}^3$.

③ $\Pi_1 = \{(s,t,2s-t) : s,t\in\mathbb{R}\}$ plan i $\mathbb{R}^3$



$$(s,t,2s-t) = s\underbrace{(1,0,2)}_{\bar u} + t\underbrace{(0,1,-1)}_{\bar v}$$

Om Π_2 inte skär Π_1 är de parallella, dvs de har samma normal $\bar n = \bar u \times \bar v$

$$\bar n = \bar u \times \bar v = \underline{e}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \times \underline{e}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$$

Π_2 på normalform är då $-2x_1 + x_2 + x_3 = D$

$(1,1,0)$ punkt i Π_2 ger $D = -2\cdot 1 + 1 + 0 = -1$

Avståndet d från Π_1 till Π_2 är avståndet från P till Π_1 som är längden av $\overline{OP}$ projicerad på $\bar n$:

$$d = |\overline{OP}_{\parallel \bar n}| = \left|\frac{\overline{OP}\bullet\bar n}{|\bar n|^2}\bar n\right| = \frac{|\overline{OP}\bullet\bar n|}{|\bar n|} = \frac{|1\cdot(-2)+1\cdot 1+0\cdot 1|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt6}$$

<u>Svar:</u> Π_2 ges av $-2x_1+x_2+x_3=-1$ och avståndet från Π_1 till Π_2 är $1/\sqrt6$.

④ Undersök om p_1, p_2, p_3, p_4 är linjärt beroende och, om inte, vilka polynom $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ som är linjärkombinationer av p_1, p_2, p_3, p_4. Beroendeekv.:

$$\lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_2 p_3(x) + \lambda_4 p_4(x) = 0 \quad (\forall x\in\mathbb{R}) \iff$$

$$\lambda_1(1+x+x^2-x^3) + \lambda_2(3+x-2x^3) + \lambda_3(1-x^3) + \lambda_4(1-x-2x^2) = 0 \iff$$

$$\underbrace{(\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)}_{0} + \underbrace{(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_4)}_{0}x + \underbrace{(\lambda_1-2\lambda_4)}_{0}x^2 + \underbrace{(-\lambda_1-2\lambda_2-\lambda_3)}_{0}x^3 = 0$$

$$(-1)\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & a_0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & a_2 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & a_3 \end{array}\right) \quad (2)(-3)\left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & a_0-a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & a_1-a_2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & a_2 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 0 & a_2+a_3 \end{array}\right) \sim (1)\left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a_0-3a_1+2a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & a_1-a_2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2a_1-a_2+a_3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a_0-3a_1+2a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & a_1-a_2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0-a_1+a_2+a_3 \end{array}\right)$$

Beroendeekv. har lösn $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = t$, $\lambda_2 = -t$, $\lambda_1 = 2t$ så

$2p_1(x) - p_2(x) + p_4(x) = 0$

$\Rightarrow$ Ett av p_1, p_2 och p_4 stryks ("löjliga element"), t.ex. p_4, så $[p_1, p_2, p_3, p_4]$ har bas $\{p_1, p_2, p_3\}$, dimension 3 och beskrivs av ekv. $a_0-a_1+a_2+a_3=0$. För att få en bas för $\mathbb{P}_3$ ($\dim \mathbb{P}_3 = 4$), lägg till ett polynom med $a_0-a_1+a_2+a_3 \neq 0$, t.ex. $q(x)=1$.

<u>Svar:</u> En bas för $\mathbb{P}_3$ är $\{p_1, p_2, p_3, 1\}$

⑤ $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A = A^t$ så det finns en ON-bas för R^4 bestående av egenvektorer för A

Sök egenvärden

$$0 = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 4-\lambda & 3-\lambda & \lambda-4 & 0 \\ 0 & -1 & 4-\lambda & 4-\lambda \\ 0 & 1 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

(+1) (−1) (+1) (−1)

$$= (4-\lambda)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{utv. vad 4}}}{=} (4-\lambda)^3(-1)^{3+3}\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (4-\lambda)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{utv. vad 1}}}{=}$$

(−1)

$$= (4-\lambda)^3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 1 \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (4-\lambda)^3 (2-\lambda-2) = -\lambda(4-\lambda)^3$$

Egenvektorer

$\lambda_1 = 0$ ger $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & | & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & | & 0 \end{pmatrix}$ ③ ① $\sim$ (−1) (−1) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 8 & | & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & | & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot\frac{1}{4} \\ \cdot\frac{1}{4} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & | & 0 \end{pmatrix}$

$x_4 = t \Rightarrow x_2 = x_3 = -t$, $x_1 = x_2 + x_3 + 3x_4 = t \Rightarrow t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

normerad $\bar{v}_1 = \underline{e}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 4$ ger $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & | & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$

$x_4 = t, x_3 = s, x_2 = r \Rightarrow x_1 = r + s - t \Rightarrow r\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{u}_2} + s\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{u}_3} + t\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{u}_4}$

För att hitta en ON-bas till egenrummet kan Gram-Schmidt användas på $\bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4$

$$\bar{v}_2 = \frac{\bar{u}_2}{|\bar{u}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{w}_3 = \bar{u}_3 - (\bar{u}_3 \cdot \bar{v}_2)\bar{v}_2 = \underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \underline{e}\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_3 = \frac{\bar{v}_3}{|\bar{v}_3|} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\bar{w}_3 = \underline{e}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{w}_4 = \bar{u}_4 - (\bar{u}_4 \cdot \bar{v}_2)\bar{v}_2 - (\bar{u}_4 \cdot \bar{v}_3)\bar{v}_3 = \underline{e}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \underline{e}\frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \underline{e}\frac{-1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{v}_4 = \frac{\bar{w}_4}{|\bar{w}_4|} = \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{w}_4 = \underline{e}\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4$ ON-bas för egenrummet till $\lambda = 4$

<u>Svar</u> $\underline{e}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{e}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ är en ON-bas för $\mathbb{R}^4$ av egenvektorer till A.

<u>Obs</u>: Andra ON-baser för egenrummet till $\lambda = 4$ är t.ex.

$$\left\{\underline{e}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{e}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{e}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \text{ eller } \left\{\underline{e}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{e}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

⑥ Med $X(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ och $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ kan systemet

skrivas $X'(t)=AX(t)$, $X(0)=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Diagonalisera A om möjligt. Egenvärden:

$$0=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3-1+1+\lambda+\lambda-\lambda=-\lambda^3+\lambda=\lambda(1-\lambda^2)=$$
$$=\lambda(1-\lambda)(1+\lambda)$$

Egenvektorer:

$$\Rightarrow \lambda_1=1, \lambda_2=0, \lambda_3=-1$$

$$\lambda_1=1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ ger } t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=0 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ ger } t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3=-1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ ger } t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bilda $T=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ och $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A=TDT^{-1}$ och

$$X'=AX \Leftrightarrow X'=TDT^{-1}X \Leftrightarrow \underbrace{T^{-1}X'}_{=(T^{-1}X)'=Y'}=D\underbrace{T^{-1}X}_{=Y} \Leftrightarrow Y'=DY$$

Med $Y(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$ fås

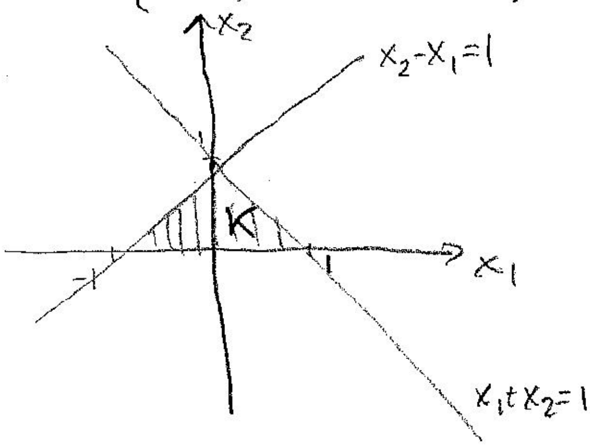
$$\begin{cases} y_1'(t)=y_1(t) \\ y_2'(t)=0 \\ y_3'(t)=-y_3(t) \end{cases} \Rightarrow Y(t)=\begin{pmatrix} c_1e^t \\ c_2 \\ c_3e^{-t} \end{pmatrix} \Rightarrow X(t)=TY(t)=\begin{pmatrix} c_2+c_3e^{-t} \\ c_1e^t+c_2 \\ c_1e^t+c_2+c_3e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$X(0)=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ger } \begin{cases} c_2+c_3=0 \\ c_1+c_2=2 \\ c_1+c_2+c_3=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=1 \\ c_2=1 \\ c_3=-1 \end{cases} \Rightarrow X(t)=\begin{pmatrix} 1-e^{-t} \\ 1+e^t \\ 1+e^t-e^{-t} \end{pmatrix}$$

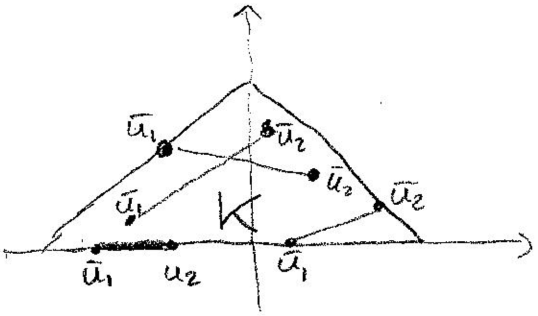
Svar: $x_1(t)=1-e^{-t}$, $x_2(t)=1+e^t$, $x_3(t)=1+e^t-e^{-t}$

---

7) $K = \{(x_1, x_2) : x_2 \geq 0 , x_2 - x_1 \leq 1 , x_1 + x_2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$



$(1-t)\bar{u}_1 + t\bar{u}_2$ för $0<t<1$ betyder punkten mellan $\bar{u}_1$ och $\bar{u}_2$ på linjen genom $\bar{u}_1$ och $\bar{u}_2$.



Vi ser att om $\bar{u}_1$ och $\bar{u}_2$ är i triangeln K så ligger alltid linjestycket mellan $\bar{u}_1$ och $\bar{u}_2$ helt i K $\Rightarrow$ K konvex

För en extrempunkt $\bar{u} \in K$ ska gälla att $\bar{u}$ inte ligger på något linjestycke mellan två olika $\bar{u}_1$ och $\bar{u}_2$ i K, vilket endast gäller för de tre hörnen $(1,0)$, $(-1,0)$ och $(0,1)$.

Svar Extrempunkter till K är $(1,0)$, $(-1,0)$ och $(0,1)$