Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA24
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2011-08-20 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) räcker för betyg 3/4/5. Godkänd kontrollskrivning ht2010 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas). Markera detta genom att skriva ”G” i rutan för uppgift 1.

Lösningsskiss finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen ses som ett höger ON-system när lämpligt.

1. Lös matrisekvationen $3XA^{-1} + B^tXA^{-1} = C$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum och $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n} \in \mathbb{V}$.

   (a) Ange definitionen av det linjära höljet $[\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}]$ till $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}$.

   (b) Visa påståendet: $\mathbf{v_n} \in [\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_{n-1}}] \Rightarrow [\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_{n-1}}, \mathbf{v_n}] = [\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_{n-1}}]$.

   (c) Gäller följande (ge bevis eller motbevis): $n > \dim\mathbb{V} \Rightarrow \mathbf{v_n} \in [\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_{n-1}}]$.

3. Bestäm på normalform ekvationen för planet som innehåller linjen

$$\begin{cases} x_1 = 1 - t \\ x_2 = 3t \\ x_3 = 2t \end{cases} \quad \text{och punkten } (2, 1, 0).$$

   Bestäm avståndet från punkten $P = (3, 1, 1)$ till detta plan samt P:s spegelpunkt i planet.

4. Bestäm en ON-bas för nollrummet till

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -7 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & -5 & -1 \end{pmatrix},$$

   samt utvidga denna till en ON-bas för hela $\mathbb{R}^4$.

VÄND !

5. Bestäm det polynom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ som i minstakvadratmening bäst ansluter till nedanstående data:

x	-2	-1	0	1	2
y	2	0	0	1	2

6. Lös systemet av differentialekvationer:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 13x_1(t) + 4x_2(t) - 5x_3(t) & x_1(0) = 2 \\ x_2'(t) = 4x_1(t) + 4x_2(t) + 4x_3(t) & x_2(0) = 1 \\ x_3'(t) = -5x_1(t) + 4x_2(t) + 13x_3(t) & x_3(0) = 0. \end{cases}$$

7. $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är en symmetrisk avbildning sådan att $(1, 2, -2)$ spänner upp nollrummet, $(2, 1, 2)$ avbildas på sig själv och $\lambda = 3$ är ett egenvärde.

   Bestäm F:s matris $A_{\underline{e}}$ i standardbasen $\underline{e}$.

LYCKA TILL!

Lösningsförslag, TATA24 Linjär algebra, 2011-08-20

(1) $3XA^{-1}+B^tXA^{-1}=C \Leftrightarrow 3X+B^tX=CA \Leftrightarrow (3E+B^t)X=CA \Leftrightarrow$

$X=(3E+B^t)^{-1}CA$

$3E+B^t=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&3\\5&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&3\\5&4\end{pmatrix}$

$\overset{-5/4}{}\left(\begin{array}{cc|cc}4&3&1&0\\5&4&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}4&3&1&0\\0&1/4&-5/4&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}4&3&1&0\\0&1&-5&4\end{array}\right)\overset{-3}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc}4&0&16&-12\\0&1&-5&4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&4&-3\\0&1&-5&4\end{array}\right)$

$\underbrace{\begin{pmatrix}4&-3\\-5&4\end{pmatrix}}_{(3E+B^t)^{-1}}$

$\Rightarrow X=\begin{pmatrix}4&-3\\-5&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}-2&-3&4\\3&4&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}2&-1&1\\-2&2&-1\end{pmatrix}}}$

---

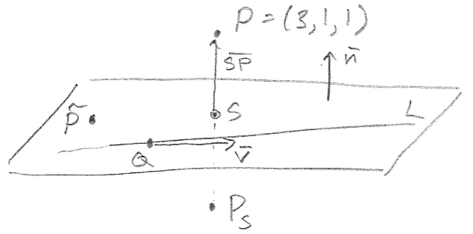
(2) a) se boken

b) se boken

c) nej, motexempel: $V=\mathbb{R}^2$, $n=3>\dim V$, $\bar{v}_1=\bar{v}_2$, $\bar{v}_3\neq\bar{0}$ ej parallell med $\bar{v}_1$ ger att $\bar{v}_3\notin[\bar{v}_1,\bar{v}_2]=[\bar{v}_1]$.

---

(3)



$L:\begin{cases}x_1=1-t\\x_2=3t\\x_3=2t\end{cases}$ $t=0$ ger $Q=(1,0,0)$ på L

$\tilde{P}=(2,1,0)$ $\bar{v}=\underline{e}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$ riktningsvektor för L

normal till planet $\bar{n}=\overline{Q\tilde{P}}\times\bar{v}=\left(\underline{e}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}-\underline{e}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)\times\underline{e}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}=\underline{e}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\times\underline{e}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}=\underline{e}\begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix}$

ger planets ekvation $2x_1-2x_2+4x_3=D$, Q i planet ger

$D=2\cdot1-2\cdot0+4\cdot0=2 \Rightarrow 2x_1-2x_2+4x_3=2 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1-x_2+2x_3=1}}$

$\overline{SP}=\overline{QP}_{/\!/\bar{n}}=\dfrac{(\overline{QP}|\bar{n})}{(\bar{n}|\bar{n})}\bar{n}=\dfrac{\left(\underline{e}\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}-\underline{e}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\middle|\bar{n}\right)}{|\bar{n}|^2}\bar{n}=\dfrac{\left(\underline{e}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\middle|\underline{e}\begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix}\right)}{2^2+(-2)^2+4^2}\underline{e}\begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix}=\dfrac{6}{24}\underline{e}\begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix}=\underline{e}\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$

Avstånd P till plan är $|\overline{SP}|=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}=\underline{\underline{\dfrac{\sqrt{6}}{2}}}$

Spegelpunkt P_s till P: $\overline{OP_s}=\overline{OP}-2\overline{SP}=\underline{e}\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}-\underline{e}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\underline{e}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ så

$\underline{\underline{P_s=(2,2,-1)}}$

---

(4) Bestäm $N(A)$, d.v.s. lös $AX=0$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -7 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{radbyte}}{\sim} \overset{(*)}{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}$$

ger $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ — $x_3 = t,\ x_4 = s \Rightarrow x_1 = t,\ x_2 = 2t+s \Rightarrow X = s\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}, s,t \in \mathbb{R}$

Låt $\bar v_1 = \underline{e}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\bar v_2 = \underline{e}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}$

En ON-bas för $N(A)$ fås t.ex. av att sätta

$$\bar u_1 = \frac{\bar v_1}{|\bar v_1|} = \underline{e}\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \bar u_2 = \frac{\bar w_2}{|\bar w_2|} \quad \text{där} \quad \bar w_2 = \bar v_2 - (\bar v_2|\bar u_1)\bar u_1 =$$

$$= \underline{e}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix} - \sqrt2\,\underline{e}\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \bar u_2 = \underline{e}\frac12\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$\underline{e}\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \underline{e}\frac12\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$ är ON-bas för $N(A)$

Raderna $\bar v_3 = (1,0,-1,0)$ och $\bar v_4 = (0,-1,2,1)$ i $(*)$ är ortogonala mot $\bar u_1$ och $\bar u_2$

För att utvidga $\bar u_1, \bar u_2$ med $\bar u_3, \bar u_4$ till en ON-bas för $\mathbb{R}^4$ kan vi sätta

$$\bar u_3 = \frac{\bar v_3}{|\bar v_3|} = \underline{e}\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \bar u_4 = \frac{\bar w_4}{|\bar w_4|} \quad \text{där} \quad \bar w_4 = \bar v_4 - (\bar v_4|\bar u_3)\bar u_3 =$$

$$= \underline{e}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\\1\end{pmatrix} - \frac{-2}{\sqrt2}\underline{e}\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{så} \quad \bar u_4 = \underline{e}\frac12\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \bar u_1, \bar u_2, \bar u_3, \bar u_4$ ON-bas för $\mathbb{R}^4$ och $\bar u_1, \bar u_2$ ON-bas för $N(A)$

(Alternativt för $\bar u_3$ och $\bar u_4$, ta $\bar v_3 \notin N(A)$ och låt $\bar u_3 = \frac{\bar w_3}{|\bar w_3|}$ där
$\bar w_3 = \bar v_3 - (\bar v_3|\bar u_1)\bar u_1 - (\bar v_3|\bar u_2)\bar u_2$ och ta sedan $\bar v_4 \notin [\bar u_1, \bar u_2, \bar u_3]$ och
låt $\bar u_4 = \frac{\bar w_4}{|\bar w_4|}$ där $\bar w_4 = \bar v_4 - (\bar v_4|\bar u_1)\bar u_1 - (\bar v_4|\bar u_2)\bar u_2 - (\bar v_4|\bar u_3)\bar u_3$)

---

(5) Vi skulle vilja lösa $\begin{cases} a_0 - 2a_1 + 4a_2 = 2 \\ a_0 - a_1 + a_2 = 0 \\ a_0 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 = 1 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 2 \end{cases}$, d.v.s. $AX = B$ där $X = \begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\\2\end{pmatrix}$$

Ej lösbart (kontrolleras enkelt), för minstakvadratlösning löser vi i stället normalekvationerna $A^tAX = A^tB$

$A^tA = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix}$, $A^tB = \begin{pmatrix}5\\1\\17\end{pmatrix}$ ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 10 & 0 & 1 \\ 10 & 0 & 34 & 17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 14 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{10} \\ \Rightarrow a_2 = \frac{7}{14} = \frac12 \end{array} \Rightarrow a_0 = 1 - 2a_2 = 0$$

$$\Rightarrow p(x) = \frac{1}{10}x + \frac12 x^2$$

(6) Med $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ och $A = \begin{pmatrix} 13 & 4 & -5 \\ 4 & 4 & 4 \\ -5 & 4 & 13 \end{pmatrix}$ kan systemet skrivas

$X'(t) = AX(t)$.

Bestäm en bas av egenvektorer till A (eftersom A är symmetrisk finns t.o.m. en ON-bas):

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 13-\lambda & 4 & -5 \\ 4 & 4-\lambda & 4 \\ -5 & 4 & 13-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = -\lambda(\lambda-12)(\lambda-18)$$

egenvärden $\lambda_1=0,\ \lambda_2=12,\ \lambda_3=18$

egenvektorer ($AX=\lambda X$)

$\lambda_1=0$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 13 & 4 & -5 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \\ -5 & 4 & 13 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ ger $X = t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ta t.ex. $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(normering ej nödvändig i detta fall)

$\lambda_2=12$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -5 & 0 \\ 4 & -8 & 4 & 0 \\ -5 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, ta $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_3=18$: $\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 4 & -5 & 0 \\ 4 & -14 & 4 & 0 \\ -5 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, ta $\bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Låt $T = \begin{pmatrix} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \bar{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ och $X = TY$, $Y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$

$X' = AX \Leftrightarrow TY' = ATY \Leftrightarrow Y' = \underbrace{T^{-1}AT}_{D}Y = DY$ där $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$

$Y' = DY$ utskrivet: $\begin{cases} y_1'(t) = 0 \\ y_2'(t) = 12y_2(t) \\ y_3'(t) = 18y_3(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = C_1 \\ y_2(t) = C_2e^{12t} \\ y_3(t) = C_3e^{18t} \end{cases}$, $X = TY$ ger då

$\begin{cases} x_1(t) = C_1 + C_2e^{12t} + C_3e^{18t} \\ x_2(t) = -2C_1 + C_2e^{12t} \\ x_3(t) = C_1 + C_2e^{12t} - C_3e^{18t} \end{cases}$ krav då $t=0$ $\begin{cases} x_1(0) = 2 \\ x_2(0) = 1 \\ x_3(0) = 0 \end{cases}$ ger $\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 2 \\ -2C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + C_2 - C_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \\ C_3 = 1 \end{array}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = e^{12t} + e^{18t} \\ x_2(t) = e^{12t} \\ x_3(t) = e^{12t} - e^{18t} \end{cases}$

---

(7) Låt $\bar{v}_1 = \underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ och $\bar{v}_2 = \underline{e}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Normera till $\bar{f}_1 = \frac{\bar{v}_1}{|\bar{v}_1|} = \underline{e}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ och $\bar{f}_2 = \underline{e}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$F(\bar{f}_1) = \bar{0}$ och $F(\bar{f}_2) = \bar{f}_2$ (egenvektorer med egenvärden 0 och 1).

F symmetrisk $\Rightarrow$ egenvektorer till skilda egenvärden är ortogonala (t.ex. $(\bar{f}_1|\bar{f}_2) = 0$). $\Rightarrow \bar{f}_3 = \bar{f}_1 \times \bar{f}_2 = \underline{e}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ måste vara egenvektor till $\lambda = 3$.

Vi har $A_{\underline{f}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ och $A_{\underline{e}} = TA_fT^{-1} = TA_fT^t$ där $T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

($\underline{f} = \underline{e}T$). Multiplicering av matriserna ger $A_{\underline{e}} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 16 & -10 & -2 \\ -10 & 13 & 8 \\ -2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

(obs $A_{\underline{e}}$ symmetrisk)