Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA24
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2011-04-27 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) räcker för betyg 3/4/5. Godkänd kontrollskrivning ht2010 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas). Markera detta genom att skriva "G" i rutan för uppgift 1.

Lösningsskiss finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen ses som ett höger ON-system när lämpligt.

1. Låt Π vara planet $\Pi = [(1,1,0),(0,1,1)] \subset \mathbb{R}^3$.
   (a) Bestäm en ON-bas för Π samt utvidga denna till en ON-bas för $\mathbb{R}^3$.
   (b) Bestäm den punkt där linjen L, given på parameterform av
   $$(x_1,x_2,x_3) = (0,0,1) + t(1,0,1),\ t \in \mathbb{R},$$
   skär Π.

2. (a) Definiera vad som menas med att en avbildning $F : U \to V$, där U och V är vektorrum, är linjär.
   (b) Låt $L : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2$ ges av $L(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = (a_1 + 2a_2) + (2a_2 + 6a_3)x + 3a_3x^2$. Visa utifrån definitionen att L är linjär.
   (c) Bestäm L:s matris i baserna $\{1, x, x^2, x^3\}$ för $\mathbb{P}_3$ och $\{1, x, x^2\}$ för $\mathbb{P}_2$.

3. Linjen L i $\mathbb{R}^3$ ges på parameterform av $(x_1,x_2,x_3) = (1,0,2) + t(0,1,1)$, $t \in \mathbb{R}$. Bestäm den punkt P på L som ligger närmast punkten $Q = (1,2,2)$, samt bestäm avståndet mellan P och Q.

4. Lös följande linjära ekvationssystem i minstakvadratmening:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

VÄND !

5. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges i standardbasen $\underline{e}$ av $A_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.
Hitta en ON-bas $\underline{f}$ av egenvektorer till F, ange F:s matris $A_{\underline{f}}$ i basen $\underline{f}$, samt tolka F geometriskt.

6. Ange minsta avståndet från ytan $Q(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_3^2 + 12x_1x_3 = 1$ i $\mathbb{R}^3$ till origo, samt ange i vilka punkter på ytan detta avstånd antas.

7. Visa att om en 2×2 - matris A har egenvärden 1 och 2 så gäller $A^2 = 3A - 2E$.

LYCKA TILL!

Lösningsförslag, Tata 24 2011-04-27:

1a) $\bar{e}_1 = \frac{1}{|(1,1,0)|}(1,1,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$

$\bar{v}_2 = (0,1,1) - \left((0,1,1) \mid \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) = (0,1,1) - (1/2, 1/2, 0) = \frac{1}{2}(-1,1,2)$

$\bar{e}_2 = \frac{1}{|(-1,1,2)|}(-1,1,2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)$

$\bar{e}_3 = \bar{e}_1 \times \bar{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) \times \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$

<u>SVAR:</u> $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\ \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)\right)$ ON-bas till Π,

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\ \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)\ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)\right)$ ON-bas till $\mathbb{R}^3$.

1b) <u>ALTERNATIV 1:</u>

$\Pi = s(1,1,0) + u(0,1,1) \qquad s; u \in \mathbb{R}$

$L = (0,0,1) + t(1,0,1) \qquad t \in \mathbb{R}$

$(0,0,1) + t(1,0,1) = s(1,1,0) + u(0,1,1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s - t = 0 \\ s + u = 0 \\ u - t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = t \\ u = -t \\ t = -1/2 \end{cases}$$

Detta ger skärningspunkten $(0,0,1) - \frac{1}{2}(1,0,1) = \frac{1}{2}(-1,0,1)$

<u>SVAR:</u> $\frac{1}{2}(-1,0,1)$.

<u>ALTERNATIV 2:</u>

En normal till Π ges enligt 1a) av $(1,-1,1)$, så $\Pi = \{(x_1,x_2,x_3) : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$. $(x_1,x_2,x_3) = (t,0,1+t)$ insatt i ekvationen ger $t + (1+t) = 0 \Leftrightarrow t = -1/2$, och vi får som ovan punkten $\frac{1}{2}(-1,0,1)$.

2a) $F: U \to V$ sägs vara linjär om

(*) $F(\bar{u}+\bar{v}) = F(\bar{u}) + F(\bar{v})$ för alla $\bar{u}, \bar{v} \in U$.

(**) $F(\lambda \bar{u}) = \lambda F(\bar{u})$ för alla $\lambda \in \mathbb{R}, \bar{u} \in U$.

2b) $L\left((a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3)\right) =$

$= L\left((a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + (a_3+b_3)x^3\right) =$

$= \left((a_1+b_1) + 2(a_2+b_2)\right) + \left(2(a_2+b_2) + 6(a_3+b_3)\right)x + 3(a_3+b_3)x^2 =$

$= \left((a_1 + 2a_2) + (2a_2 + 6a_3)x + 3a_3x^2\right) + \left((b_1+2b_2) + (2b_2+6b_3)x + 3b_3x^2\right)$

$= L(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) + L(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3)$,

vilket visar att L uppfyller (*).

$L\left(\lambda(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)\right) = L\left((\lambda a_0) + (\lambda a_1)x + (\lambda a_2)x^2 + (\lambda a_3)x^3\right)$

$= \left((\lambda a_1) + 2(\lambda a_2)\right) + \left(2(\lambda a_2) + 6(\lambda a_3)\right)x + 3(\lambda a_3)x^2 =$

$= \lambda\left((a_1 + 2a_2) + (2a_2 + 6a_3)x + 3a_3x^2\right) =$

$= \lambda L(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)$, vilket visar att (**) håller. V.S.B.

2c) Med $\underline{e} = (1 \ x \ x^2 \ x^3)$ $\underline{f} = (1 \ x \ x^2)$ har vi att

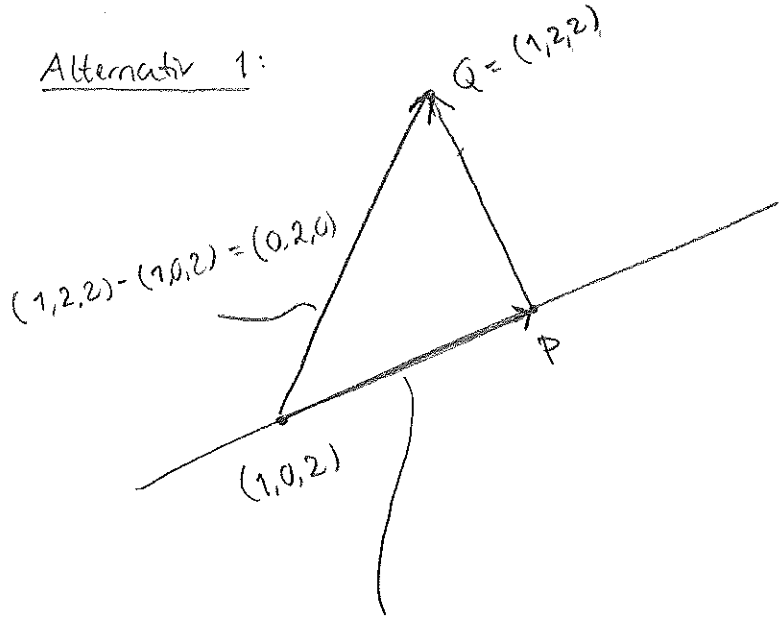
$F(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = F\left(\underline{e}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right) =$

$= (a_1 + 2a_2) + (2a_2 + 6a_3)x + 3a_3x^2 = \underline{f}\begin{pmatrix} a_1 + 2a_2 \\ 2a_2 + 6a_3 \\ 3a_3 \end{pmatrix} =$

$= \underline{f}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

SVAR: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

3) Alternativ 1:



$$\frac{((0,2,0)|(0,1,1))}{|(0,1,1)|^2}(0,1,1) = (0,1,1)$$

$$P = (1,0,2) + (0,1,1) = (1,1,3)$$

$$|\overline{PQ}| = |(1,1,3) - (1,2,2)| = |(0,-1,1)| = \sqrt{2}$$

SVAR: $P = (1,1,3)$, $|\overline{PQ}| = \sqrt{2}$.

Alternativ 2:

Avståndet mellan punkten $(1,0,2) + t(0,1,1)$ och $(1,2,2)$

ges av $|(1,0,2) + t(0,1,1) - (1,2,2)| = |(0, t-2, t)| =$

$$= \sqrt{(t-2)^2 + t^2} = \sqrt{2t^2 - 4t + 4} = \sqrt{2(t^2 - 2t + 2)} = \sqrt{2((t-1)^2 + 1)}.$$

Minsta värdet $= \sqrt{2}$ fås då $t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$, så

$$P = (1,0,2) + (0,1,1) = (1,1,3).$$

4) Vi ska alltså lösa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 3 & 2 & 8 \\ 3 & 5 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -1 \quad -3 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{matrix} -1 \quad -2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 3 & -2 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ 1/2 \quad 6 \quad -3 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ 1/3 \quad 1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 \end{array}\right)$$

<u>SVAR:</u> $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 4/3 \end{pmatrix}$.

5)
$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & -6+\lambda \\ 0 & 6-\lambda & 12-2\lambda \\ -1 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (6-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)^2(-\lambda) = 0$$

$\Leftrightarrow$ $\lambda = 0$ eller $\lambda = 6$ (dubbelrot).

$\underline{\lambda = 0:}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} x_1 = x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{array} \qquad \bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$$

$\underline{\lambda = 6:}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad x_1 = 2x_2 - x_3 \quad (*)$$

$$\bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0), \quad \bar{f}_3 = \bar{f}_1 \times \bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}(-1,2,5)$$

($\underline{\text{OBS!}}$ $\bar{f}_3$ uppfyller $(*)$ samt $(\bar{f}_2|\bar{f}_3) = 0$.)

Detta ger $\underline{f} = (\bar{f}_1 \; \bar{f}_2 \; \bar{f}_3)$ och $A_{\underline{f}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\text{SVAR:}}$ $\underline{f} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1) \;\; \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0) \;\; \frac{1}{\sqrt{30}}(-1,2,5)\right)$

$A_{\underline{f}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. F är projektion på $W = [\bar{f}_2, \bar{f}_3]$ följt av en sträckning med faktor 6.

6) $Q(x_1,x_2,x_3) = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix}7&0&6\\0&5&0\\6&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix}7-\lambda&0&6\\0&5-\lambda&0\\6&0&-2-\lambda\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}0&5-\lambda&0\\7-\lambda&0&6\\6&0&-2-\lambda\end{vmatrix} = (5-\lambda)\begin{vmatrix}7-\lambda&6\\6&-2-\lambda\end{vmatrix} =$$

$$= (5-\lambda)((7-\lambda)(-2-\lambda)-36) = (5-\lambda)(\lambda^2-5\lambda-50) = (5-\lambda)(\lambda-10)(\lambda+5) = 0$$

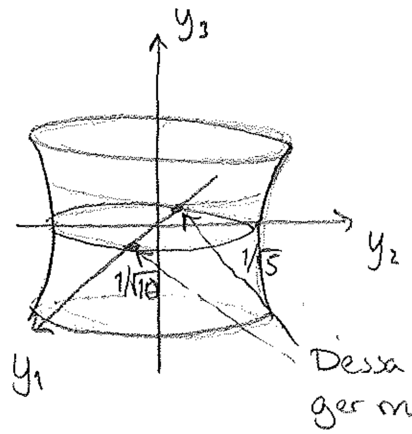
ger egenvärdena $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = -5$.

$\underline{\lambda_1 = 10:}$ $\left(\begin{array}{ccc|c}-3&0&6&0\\0&-5&0&0\\6&0&-12&0\end{array}\right)\begin{array}{l}\leftarrow 1/3 \quad -6\\ \leftarrow -1/5\\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$ $\quad x_1 = 2x_3$, $x_2 = 0$, $\bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1)$

$\underline{\lambda_2 = 5:}$ $\left(\begin{array}{ccc|c}2&0&6&0\\0&0&0&0\\6&0&-7&0\end{array}\right)$ $\quad x_1 = x_3 = 0$, $x_2 = t$, $\bar{f}_2 = (0,1,0)$

$\underline{\lambda_3 = -5:}$ $\left(\begin{array}{ccc|c}12&0&6&0\\0&10&0&0\\6&0&3&0\end{array}\right)\begin{array}{l}\leftarrow 1/6 \quad -3\\ \leftarrow 1/10\\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}2&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$ $\quad x_3 = -2x_1$, $x_2 = 0$, $\bar{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2)$

$Q\left(\underline{e}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right) = Q\left(\underline{f}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right) = 10y_1^2 + 5y_2^2 - 5y_3^2 = 1$ ger s.k. enmantlad hyperboloid.



Vi ser att närmsta avstånd ges av $y_1 = \pm 1/\sqrt{10}$, $y_2 = y_3 = 0$.
Punkterna är alltså $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}\bar{f}_1 = \pm\frac{1}{5\sqrt{2}}(2,0,1)$
avståndet $1/\sqrt{10}$

SVAR: Minsta avståndet är $1/\sqrt{10}$ och detta antas i punkterna $\pm\frac{1}{5\sqrt{2}}(2,0,1)$.

7) Om A är 2×2-matris med egenvärden 1 och 2, då gäller att $A = C^{-1}DC$ för någon inverterbar matris C, och $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Så

$$A^2 = (C^{-1}DC)(C^{-1}DC) = C^{-1}D\underbrace{CC^{-1}}_{E}DC = C^{-1}D^2C$$

$$= C^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}C = C^{-1}\left(3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)C =$$

$$= \underbrace{3C^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}C}_{A} - \underbrace{2C^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}C}_{E} = 3A - 2E. \quad \text{V.S.B.}$$