Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA24
Provkod: TEN1

# Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

**2010-12-22 kl 14.00–19.00**

*Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.*

*8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) räcker för betyg 3/4/5. Godkänd kontrollskrivning ht2010 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas). Markera detta genom att skriva "G" i rutan för uppgift 1.*

*Lösningsskiss finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.*

**Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen ses som ett höger ON-system när lämpligt.**

1. Låt $\mathbb{W} = [(0,4,0),(1,3,2),(1,2,2)] \subset \mathbb{R}^3$.
   (a) Bestäm en ON-bas för $\mathbb{W}$.
   (b) Låt $\overline{u} = (2,1,3)$. Bestäm $\overline{u}_{||\mathbb{W}}$ och $\overline{u}_{\perp\mathbb{W}}$ sådana att $\overline{u} = \overline{u}_{||\mathbb{W}} + \overline{u}_{\perp\mathbb{W}}$, där $\overline{u}_{||\mathbb{W}} \in \mathbb{W}$ och $\overline{u}_{\perp\mathbb{W}}$ är ortogonal mot $\mathbb{W}$.

2. (a) Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum och $\{\overline{u}_1,\ldots,\overline{u}_m\} \subset \mathbb{V}$. Definiera vad som menas med att $\{\overline{u}_1,\ldots,\overline{u}_m\}$ är linjärt oberoende.
   (b) Låt $\mathbb{E}$ vara ett euklidiskt rum och $\{\overline{u}_1,\ldots,\overline{u}_m\} \subset \mathbb{E}$. Definiera vad som menas med att $\{\overline{u}_1,\ldots,\overline{u}_m\}$ är en ON-mängd.
   (c) Bevisa att en ON-mängd är linjärt oberoende.

3. Linjen $L_1$ ges av $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \end{cases}$ och linjen $L_2$ av $(x_1,x_2,x_3) = (0,3,2)+t(1,-1,1)$, $t \in \mathbb{R}$. Bestäm avståndet mellan $L_1$ och $L_2$. Ange de punkter på $L_1$ och $L_2$ som ligger närmast varandra.

4. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ ges i standardbaserna för $\mathbb{R}^4$ och $\mathbb{R}^3$ av matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Bestäm baser för $F$:s nollrum och värderum.

**VÄND !**

5. Låt $Q(x_1, x_2) = Q(\underline{e}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = 2x_1^2 + 2\sqrt{6}\,x_1x_2 - 3x_2^2$ vara en kvadratisk form på $\mathbb{R}^2$.

(a) Hitta en ON-bas $\underline{f}$ sådan att $Q$ i denna bas har formen $Q(\underline{e}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = Q(\underline{f}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$.

(b) Bestäm största och minsta värdet som $Q(x_1, x_2)$ antar då $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

6. Bestäm det polynom $p(x) = a_0 + a_1x^2 + a_2x^4$ som i minstakvadratmening bäst ansluter till nedanstående data:

| x | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| y | 1 | 2 | 3 | 4 |

7. Låt $\mathbb{W} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^4$, och låt $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ vara spegling i $\mathbb{W}$, d.v.s. givet $\overline{u} \in \mathbb{R}^4$ är $F(\overline{u}) = \overline{u}_{||\mathbb{W}} - \overline{u}_{\perp\mathbb{W}}$, där $\overline{u}_{||\mathbb{W}} \in \mathbb{W}$ och $\overline{u}_{\perp\mathbb{W}}$ är ortogonal mot $\mathbb{W}$.

(a) Bestäm en ON-bas $\underline{f}$ till $\mathbb{R}^4$ bestående av egenvektorer till $F$, samt ange $F$:s matris $A_{\underline{f}}$ i denna bas.

(b) Bestäm $F$:s matris $A_{\underline{e}}$ i standardbasen $\underline{e}$.

**LYCKA TILL!**

LÖSNINGS-SKISS TATA24 2010-12-22

(1)

a) $\bar{e}_1 = \frac{1}{\|(0,4,0)\|}(0,4,0) = (0,1,0)$

$\bar{v}_2 = (1,3,2) - ((1,3,2)|(0,1,0))(0,1,0) = (1,3,2) - (0,3,0) = (1,0,2)$

$\bar{e}_2 = \frac{1}{\|\bar{v}_2\|}\bar{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2)$

$(1,2,2) = (1,3,2) - (0,1,0)$ så "löjligt element".

SVAR: $\left((0,1,0) \ \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2)\right)$ ON-bas till W.

b) $\bar{u}_{\|W} = (\bar{u}|\bar{e}_1)\bar{e}_1 + (\bar{u}|\bar{e}_2)\bar{e}_2 =$

$= ((2,1,3)|(0,1,0))(0,1,0) + \left((2,1,3)\,\Big|\,\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2)\right)\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2) =$

$\ldots = \frac{1}{5}(8,5,16)$.

$\bar{u}_{\perp W} = \bar{u} - \bar{u}_{\|W} = (2,1,3) - \frac{1}{5}(8,5,16) = \frac{1}{5}(2,0,-1)$

SVAR: $\bar{u}_{\|W} = \frac{1}{5}(8,5,16)$

$\bar{u}_{\perp W} = \frac{1}{5}(2,0,-1)$.

(2)

a) $\{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m\} \subset \mathbb{V}$ sägs vara linjärt oberoende om de enda tal $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ som uppfyller $\lambda_1 \bar{u}_1 + \ldots + \lambda_m \bar{u}_m = \bar{0}$ är $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.

b) $\{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m\} \subset \mathbb{E}$ sägs vara en ON-mängd om

$$(\bar{u}_i | \bar{u}_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (0 \leq i,j \leq m).$$

(D.v.s. längd 1 och parvis ortogonala.)

c) Vi ska enligt a) visa att om $\lambda_1 \bar{u}_1 + \ldots + \lambda_m \bar{u}_m = \bar{0}$, då gäller att $\lambda_i = 0$ för $i = 1, \ldots, m$. Vi har

$$0 = (\bar{0} | \bar{u}_i) = (\lambda_1 \bar{u}_1 + \ldots + \lambda_i \bar{u}_i + \ldots + \lambda_m \bar{u}_m | \bar{u}_i) =$$

$$= \lambda_1 \underbrace{(\bar{u}_1 | \bar{u}_i)}_{=0} + \ldots + \lambda_i \underbrace{(\bar{u}_i | \bar{u}_i)}_{=1} + \ldots + \lambda_m \underbrace{(\bar{u}_m | \bar{u}_i)}_{=0} =$$

$$= \lambda_i .$$

V.S.B

③

$L_1$ på parameterform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{(-2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

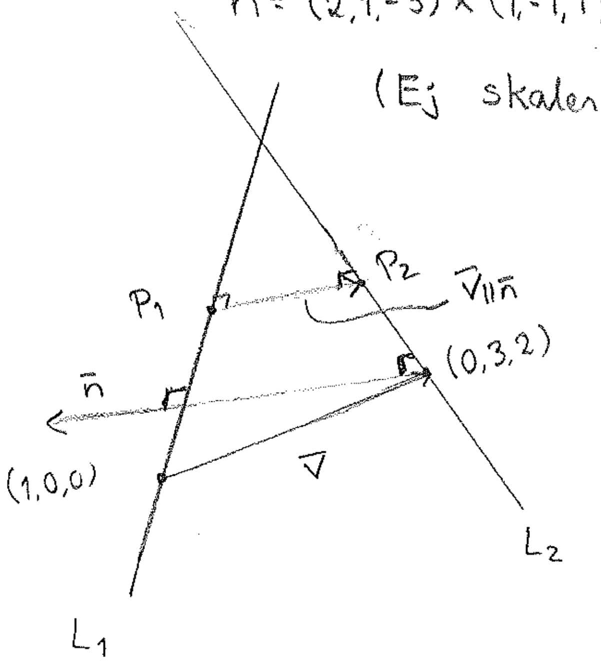
$\Leftrightarrow \quad (x_1, x_2, x_3) = (1,0,0) + s(2,1,-3)$.

$L_2: \ (x_1, x_2, x_3) = (0,3,2) + t(1,-1,1)$

Linjerna är inte parallella och vi tar nu fram en vektor $\bar{n}$ som är normal mot båda via kryssprodukten

$$\bar{n} = (2,1,-3) \times (1,-1,1) = -(2,5,3)$$

(Ej skalenlig figur!)




$\bar{v} = (0,3,2) - (1,0,0) = (-1,3,2)$

$$\bar{v}_{\|\bar{n}} = \frac{(\bar{v}|\bar{n})}{\|\bar{n}\|^2}\bar{n} = \frac{((-1,3,2)|-(2,5,3))}{38}(-2,-5,-3) = \frac{1}{2}(2,5,3)$$

Avståndet $= \|\bar{v}_{\|\bar{n}}\| = \|\frac{1}{2}(2,5,3)\| = \frac{1}{2}\sqrt{4+25+9} = \frac{1}{2}\sqrt{38} = \sqrt{\frac{19}{2}}$

$P_1, P_2$ ges av att $P_2 - P_1 = \bar{v}_{\|\bar{n}}$:

$(t, 3-t, 2+t) - (1+2s, s, -3s) = \frac{1}{2}(2,5,3) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow t=1, \ s=-1/2$

$P_1 = (0, -1/2, 3/2)$, $P_2 = (1,2,3)$

SVAR: Avståndet $= \sqrt{\frac{19}{2}} = \|(1,2,3) - (0,-1/2,3/2)\|$ då $(0,-1/2,3/2)$ på $L_1$, $(1,2,3)$ på $L_2$.

③ <u>Alternativ 2</u>

Eftersom $L_1$ enligt ovan ges av $(x_1, x_2, x_3) = (1,0,0) + s(2,1,-3)$

$L_2$ av $(x_1, x_2, x_3) = (0,3,2) + t(1,-1,1)$

så ska vi alltså hitta minimum till

$\sqrt{f(s,t)}$, då

$$f(s,t) = \|(1+2s, s, -3s) - (t, 3-t, 2+t)\|^2 =$$

$$= \ldots = 14s^2 + 4st + 10s + 3t^2 - 4t + 14 =$$

$$= 14s^2 + 3\left(t + \frac{2s}{3}\right)^2 - \frac{4s^2}{3} + 10s - 4t + 14 = \Big/ \begin{matrix} u = t + \frac{2s}{3} \\ t = u - \frac{2s}{3} \end{matrix} \Big/$$

$$= \frac{38s^2}{3} + \frac{38}{3}s + 3u^2 - 4u + 14 =$$

$$= \frac{38}{3}\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{38}{3} \cdot \frac{1}{4} + 3\left(u - \frac{2}{3}\right)^2 - 3 \cdot \frac{4}{9} + 14$$

$$= \frac{38}{3}\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(u - \frac{2}{3}\right)^2 + 19/2$$

Så min ges av $s = -1/2$, $u = 2/3 \Leftrightarrow s = -1/2$, $t = 1$

$\sqrt{f(-1/2, 1)} = \sqrt{19/2}$. $P_1 = (0, -1/2, 3/2)$ ges av $s = -1/2$ insatt i ekvationen för $L_1$.

$P_2 = (1,2,3)$ ges av $t = 1$ insatt i ekvationen för $L_2$.

(4) Vi noterar att

$$N(F) = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$ (nollrum).

$$V(F) = [(1,2,1), (2,-1,1), (1,-3,0), (5,0,3)]$$ (värderum).

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} -2 \quad -1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -10 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} -5 \quad 2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t - s \\ x_2 = -t - 2s \\ x_3 = t \\ x_4 = s \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) = t(1,-1,1,0) + s(-1,-2,0,1)$$

Första två kolumnerna ger bas till $V(F)$ (t.ex.)
(OBS! $\dim V(F) + \dim N(F) = \dim \mathbb{R}^4 = 4$).

SVAR: $((1,-1,1,0) \quad (-1,-2,0,1))$ bas till $N(F)$

$((1,2,1) \quad (2,-1,1))$ bas till $V(F)$.

⑤ $Q\left(\underline{e}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right)=(x_1\ x_2)\begin{pmatrix}2 & \sqrt{6}\\ \sqrt{6} & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

a) $\begin{vmatrix}2-\lambda & \sqrt{6}\\ \sqrt{6} & -3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(-3-\lambda)-6=\lambda^2+\lambda-12=0$

ger $\lambda_1=3,\ \lambda_2=-4.$

$\lambda_1=3$: $\left(\begin{array}{cc|c}2-3 & \sqrt{6} & 0\\ \sqrt{6} & -3-3 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}-1 & \sqrt{6} & 0\\ \sqrt{6} & -6 & 0\end{array}\right)\sqrt{6}\sim\left(\begin{array}{cc|c}-1 & \sqrt{6} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$

$\begin{cases}x_1=\sqrt{6}\,t\\ x_2=t\end{cases}$ $\quad \bar{f}_1=\frac{1}{\sqrt{7}}(\sqrt{6},1)$

$\lambda_2=-4$: $\left(\begin{array}{cc|c}2+4 & \sqrt{6} & 0\\ \sqrt{6} & -3+4 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}6 & \sqrt{6} & 0\\ \sqrt{6} & 1 & 0\end{array}\right)-\sqrt{6}\sim\left(\begin{array}{cc|c}0 & 0 & 0\\ \sqrt{6} & 1 & 0\end{array}\right)$

$\begin{cases}x_1=t\\ x_2=-\sqrt{6}\,t\end{cases}$ $\quad \bar{f}_2=\frac{1}{\sqrt{7}}(-1,\sqrt{6})$

$\underline{f}=(\bar{f}_1\ \bar{f}_2)$ ger nu $Q\left(\underline{f}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)=3y_1^2-4y_2^2$

SVAR: $\underline{f}=\left(\frac{1}{\sqrt{7}}(\sqrt{6},1)\quad \frac{1}{\sqrt{7}}(-1,\sqrt{6})\right)$.

b) $x_1^2+x_2^2=1 \iff y_1^2+y_2^2=1$

Max $=3$ (antas då $(y_1,y_2)=\pm(1,0)\iff(x_1,x_2)=\pm\frac{1}{\sqrt{7}}(\sqrt{6},1)$)

Min $=-4$ (antas då $(y_1,y_2)=\pm(0,1)\iff(x_1,x_2)=\pm\frac{1}{\sqrt{7}}(-1,\sqrt{6})$)

SVAR: Max $=3$, Min $=-4$.

⑥ Vill ha $y \approx p(x)$

$$p(-1) = a_0 + a_1 + a_2 = 1$$
$$p(0) = a_0 = 2$$
$$p(1) = a_0 + a_1 + a_2 = 3$$
$$p(2) = a_0 + 4a_1 + 16a_2 = 4$$

ger systemet

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\bar{y}}$$

Normalekvation: $A^t A \bar{x} = A^t \bar{y}$

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 18 \\ 6 & 18 & 66 \\ 18 & 66 & 258 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 33 \\ 9 & 33 & 129 \end{pmatrix}$$

$$A^t \bar{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 68 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 34 \end{pmatrix}$$

Så minsta kvadrat lösningarna fås ur

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 9 & 5 \\ 3 & 9 & 33 & 10 \\ 9 & 33 & 129 & 34 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ 1/3 \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 9 & 5 \\ 1 & 3 & 11 & 10/3 \\ 9 & 33 & 129 & 34 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -2 \quad -9 \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & -13 & -5/3 \\ 1 & 3 & 11 & 10/3 \\ 0 & 6 & 30 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} 1 \quad 2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & -13 & -5/3 \\ 1 & 0 & -2 & 5/3 \\ 0 & 0 & 4 & 2/3 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ 1/4 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & -13 & -5/3 \\ 1 & 0 & -2 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ 2 \quad 13 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 0 & 3/6 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 \end{array}\right) : \begin{cases} a_0 = 2 \\ a_1 = -1/6 \\ a_2 = 1/6 \end{cases}$$

<u>SVAR:</u> $p(x) = 2 - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^4}{6}$.

⑦ a) $\mathbb{W} \subset \mathbb{R}^4$, $\dim \mathbb{W} = 3$, $\dim \mathbb{W}^\perp = 1$.

$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow (\bar{f}_1 | (x_1, x_2, x_3, x_4)) = 0$ där

$\bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1,0)$.

$\mathbb{W}^\perp = [\bar{f}_1]$, $F(\bar{f}_1) = -\bar{f}_1$ så egenvektor svarande mot egenvärde $-1$.

$\bar{u} \in \mathbb{W} \Rightarrow F(\bar{u}) = \bar{u}$, så egenvektor svarande mot egenvärde $1$.

Vi behöver nu bara välja $\bar{f}_2, \bar{f}_3, \bar{f}_4$ att vara ON-bas till $\mathbb{W}$, vilket i detta fall kan göras ganska enkelt för hand (annars använd Gram-Schmidt...)

$\bar{f}_2 = (0,0,0,1)$, $\bar{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)$, $\bar{f}_4 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2,0)$.

Egenvärdena hamnar nu i diagonalen till $A_{\underline{f}}$.

<u>SVAR:</u> $\underline{f} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1,0) \quad (0,0,0,1) \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0) \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2,0)\right)$

$$A_{\underline{f}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Om $\underline{f} = \underline{e}T$, $\underline{f}Y = \underline{e}TY = \underline{e}X \Leftrightarrow X = TY \Leftrightarrow Y = T^{-1}X$

så gäller $F(\underline{f}Y) = \underline{f}A_{\underline{f}}Y = \underline{e}TA_{\underline{f}}T^{-1}X$.

Här är
$$T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
och $T^{-1} = T^t$

då $T$ är ON-matris.

$$A_{\underline{e}} = TA_{\underline{f}}T^t = \ldots = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>SVAR:</u> $A_{\underline{e}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.