LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Ulf Janfalk & Thomas Karlsson

Tentamen i Linjär algebra (TATA24/TEN1) 2010–04–06, 8–13.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.
Resultatet meddelas vi e-post. För godkänt räcker 8 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ht2009 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas). Markera detta genom att skriva "G" i rutan för uppgift 1.
Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar läggs ut efter skrivtidens slut på

http://www.mai.liu.se/~uljan/kurser/TATA24/

(3 p) 1. Bestäm en bas för underrummet

$$\mathbb{M} = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-2\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-1\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\0\\3\\2\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\4\\5\\0\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\2\\4\\1\end{pmatrix} \right] \subset \mathbb{R}^4.$$

Om $\dim \mathbb{M} < 4$, fyll ut basen i $\mathbb{M}$ till en bas i $\mathbb{R}^4$.

(1 p) 2. (a) Formulera tre, i kursen ingående, centrala satser om egenvärden och egenvektorer.

(2 p) (b) Bevisa en av de satser du formulerade ovan.

(3 p) 3. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{E}^4 \to \mathbb{E}^4$ har i standaradbasen matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestäm en ON-bas av egenvektorer till F.

(1 p) 4. (a) Låt $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara en linjär avbildning och $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ standardbasen i $\mathbb{R}^3$. Vidare,

$$F(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1, \quad F(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_2, \quad F(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3.$$

Ange F:s matris i standardbasen.

(2 p) (b) Verifiera att bilderna av

$$\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$$

blir de i texten givna genom att använda den matris du just bestämt.

VÄND!

(3 p) 5. Nedanstående ekvationer beskriver varsin kurva i planet:

$$3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 12, \qquad 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = 13.$$

Ange vilken typ av kurva respektive ekvation beskriver samt bestäm skärningspunkterna mellan kurvorna.

(3 p) 6. Låt $F\colon \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ vara den linjära avbildning som har matrisen

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i standardbasen. Visa att F är en vridning och bestäm vridningsaxel och vridningsvinkel.

(3 p) 7. Låt $\mathbb{E}$ vara ett euklidiskt rum, $\dim \mathbb{E} < \infty$ och $F\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ en linjär avbildning som i någon ON-bas i $\mathbb{E}$ har matrisen $A \neq \mathit{0}$ för vilken gäller att

$$A^t A = 2A.$$

Bestäm F:s egenvärden och beskriv egenrummen.

Lösningsförslag till TATA24, Linjär algebra, 2010–04–06

1. Kalla de genererande vektorerna $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_6$ och ställ upp ekvationen linjärkombination = godtycklig vektor och undersök på vanligt sätt. Då fås

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \lambda_6\mathbf{u}_6 = \ldots = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 4 & 2 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 & 4 & x_3 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 0 & 1 & x_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & -x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & x_1 - x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11x_1 + 9x_2 - 5x_3 + 2x_4 \end{array}\right).$$

Detta ger att om vi börjar om med $\mathbf{u}_3,\ \mathbf{u}_5$ och $\mathbf{u}_6$ i högerledet istället och gör samma radoperationer en gång till så fås

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 4 & 2 & x_2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 & 4 & x_3 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 & x_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & -x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & x_1 - x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11x_1 + 9x_2 - 5x_3 + 2x_4 \end{array}\right),$$

d v s $\mathbf{u}_3,\ \mathbf{u}_5,\ \mathbf{u}_6$ kan utses till löjliga element, $\mathbb{M} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4]$ enligt satsen om löjliga element, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4$ är linjärt oberoende och därmed en bas för $\mathbb{M}$ vilket ger $\dim \mathbb{M} = 3$. För att den godtyckliga vektorn skall vara en linjärkombination av $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4$ krävs att systemet med x_1, x_2, x_3, x_4 som högerled, är lösbart, d v s $-11x_1 + 9x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 0$. Följaktligen gäller

$$\mathbb{M} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \colon -11x_1 + 9x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 0 \right\}.$$

Som utfyllnad väljer vi vilken som helst vektor där $-11x_1 + 9x_2 - 5x_3 + 2x_4 \neq 0$. Därmed har vi "rätt antal" element och det räcker att visa att dessa fyra är linjärt oberoende för att vi skall ha en bas, enligt satsen om rätt antal element. För att göra det enkelt för oss väljer vi $\mathbf{e}_4$ som utfyllnad. Ställer vi upp beroendeekvationen för dessa och gör om samma radoperationer en tredje gång fås

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

och entydighetstrappan visar nu att systemet är entydigt löbart, d v s har endast den triviala lösningen och våra fyra vektorer är därmed en bas för $\mathbb{R}^4$.

2. Se kursboken, kapitel 7.

3. Beräkna egenvärdena på vanligt sätt:

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 1 & -1\\ 1 & -\lambda & -1 & 1\\ 1 & -1 & -\lambda & 1\\ -1 & 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix} \overset{r_4+r_1+r_2+r_3}{=} \begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 1 & -1\\ 1 & -\lambda & -1 & 1\\ 1 & -1 & -\lambda & 1\\ 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda\end{vmatrix} \overset{\substack{k_1-k_4\\ k_2-k_4\\ k_3-k_4}}{=}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 2 & -1\\ 0 & -1-\lambda & -2 & 1\\ 0 & -2 & -1-\lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}\text{utv. efter rad 4}\\ \text{utv. efter kolonn 1}\end{bmatrix}=$$

$$=(1-\lambda)^2\begin{vmatrix}-1-\lambda & -2\\ -2 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2\big((1+\lambda)^2-4\big)=0 \iff$$

$$\iff \lambda=1 \text{ (trippel)},\ -3.$$

Egenvektorerna kan beräknas på vanligt sätt. Vi skall beräkna dem på ett ovanligare sätt för att minimera arbetet med ortogonaliseringen.

$$\underline{\underline{\lambda=1}}:\ \left(\begin{array}{cccc|c}-1 & 1 & 1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}-1 & 1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\iff -x_1+x_2+x_3-x_4=0.$$

Eftersom egenrummet till $\lambda=1$ är tre-dimensionellt väljer vi tre vektorer som uppfyller ekvationen ovan varav två av dem är ortogonala mot varann, varefter vi ortogonaliserar den tredje. Välj, t ex

$$\mathbf{f}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{f}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\quad \mathbf{u}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_{\|[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}=(\mathbf{u}|\mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1+(\mathbf{u}|\mathbf{f}_2)\,\mathbf{f}_2=\frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}\implies$$

$$\implies \mathbf{u}_{\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}=\mathbf{u}-\mathbf{u}_{\|[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}=\frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\2\\-2\\0\end{pmatrix}-\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}=\mathbf{f}_3.$$

Återstår att beräkna egenvektorn till $\lambda=-3$ vilket förstås kan göras på vanligt sätt. Vill man inte lösa ekvationssystem kan man istället utnyttja att egenrummen är ortogonala och att egenrummet till 1 är tre-dimensionellt. Därav följer att egenrummet till -3 är en-dimensionellt, d v s det finns *en* riktning ortogonal mot egenrummet till 1. Vi läser av den ur koefficienterna till ekvationen och väljer sedan

$$\mathbf{f}_4 = \frac{1}{2}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

4. (a) Ställ upp sambanden i matrisform och lös som ett vanligt ekvationssystem

$$\begin{pmatrix}F(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)\\F(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)\\F(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F(\mathbf{e}_1)+F(\mathbf{e}_2)\\F(\mathbf{e}_1)-F(\mathbf{e}_2)+F(\mathbf{e}_3)\\F(\mathbf{e}_1)+F(\mathbf{e}_3)\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F(\mathbf{e}_1)\\F(\mathbf{e}_2)\\F(\mathbf{e}_3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\\mathbf{e}_2\\\mathbf{e}_3\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&\mathbf{e}_1\\1&-1&1&\mathbf{e}_2\\1&0&1&\mathbf{e}_3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&\mathbf{e}_1\\0&1&-1&\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_3\\0&0&1&-\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3\\0&1&0&-\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\\0&0&1&-\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3\end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow F(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad F(\mathbf{e}_2) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},$$

$$F(\mathbf{e}_3) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} \iff A = \begin{pmatrix}1&0&-1\\1&-1&-1\\-1&1&2\end{pmatrix}$$

(b) Sätt in de givna vektorerna i F.

$$F(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2) = F\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&-1&-1\\-1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \mathbf{e}_1$$

$$F(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3) = F\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&-1&-1\\-1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \mathbf{e}_2$$

$$F(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3) = F\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&-1&-1\\-1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \mathbf{e}_3.$$

Följaktligen är A korrekt beräknad.

5. Bestäm egenvärden och egenvektorer till de båda kvadratiska formerna.

$$\det(A_1 - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 3 \pm 1 = 4,\ 2$$

$$\underline{\underline{\lambda = 4}}: \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow X_4 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\lambda = 2}}: \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow X_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_2 - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 2 \pm 1 = 3,\ 1$$

$$\underline{\underline{\lambda = 3}}: \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow X_3 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\lambda = 1}}: \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow X_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Följaktligen har de två kvadratiska formerna samma egenvektorer och diagonaliseras därför båda av samma ON-bas av egenvektorer. Då bådas egenvärden är positiva är kurvorna två ellipser. Sätt

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \underline{\mathbf{f}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}T \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 4y_1^2 + 2y_2^2 = 12 \\ 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = \ \ y_1^2 + 3y_2^2 = 13 \end{cases} \overset{r_1 - 4r_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \quad\quad - 10y_2^2 = -40 \\ 3y_1^2 + \quad y_2^2 = \quad 13 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} y_2^2 = 1 \\ y_1^2 = 4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y_1 = \pm 1 \\ y_2 = \pm 2 \end{cases} \Longrightarrow (y_1, y_2) = \pm(1, \pm 2).$$

Detta ger att vi får fyra skärningspunkter vars ortsvektorer kan beräknas på följande sätt:

$$\overline{OP} = \pm\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 2 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{cases},$$

d v s de sökta skärningspunkterna är

$$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(3,1), \quad \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1,3).$$

6. Vi observerar att A är ortonormal så att F är isometrisk enligt sats 6.7.2, sid 166. Vidare, den enda tillåtna produkt med tecken i det A som är nollskild är $(-1)^1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1$, d v s $\det A = 1$. Därmed är F en vridning enligt sats 6.7.6, sid 170. Då vridningsaxeln är en egnvektor med egenvärde 1 beräknar vi den genom, att lösa $AX = X \Longleftrightarrow (A - E)X = 0$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_1 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi beräknar vridningsvinkeln genom att bestämma vinkeln mellan en vektor i vridningsplanet (= vridningsaxelns normalplan) och dess bild. Exempelvis är $\mathbf{e}_1$ ortogonal mot vrisningsaxeln. Då

$$F(\mathbf{e}_1) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{e}_1$$

följer det att vridningsvinkeln är π (eller $180°$).
Anmärkning: Detta kan förstås också göras genom att bestämma en ny högerorienterad ON-bas med $\mathbf{f}_1 \parallel$ vridningsaxeln och byta till denna bas.

7. Ur räknereglerna för transponering följer det att

$$\left(A^t A\right)^t = A^t \left(A^t\right)^t = A^t A,$$

d v s $A^t A$ är symmetrisk. Eftersom $A^t A = 2A$ följer det också i själva verket att A är symmetrisk och att F är en symmetrisk avbildning. Därmed är F diagonaliserbar och dess egenrum inbördes ortogonala. $A^t = A$ ger $A^2 = 2A$ och följaktligen att $F \circ F = F^2 = 2F$. Låt $\mathbf{u}$ vara en egenvektor med egenvärde λ till F. Då fås

$$\left.\begin{aligned} F^2(\mathbf{u}) = F(F(\mathbf{u})) = F(\lambda\mathbf{u}) = \lambda F(\mathbf{u}) = \lambda^2\mathbf{u} \\ 2F(\mathbf{u}) = 2\lambda\mathbf{u} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \lambda^2 = 2\lambda \iff \lambda = 0,\ 2$$

eftersom $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ då $\mathbf{u}$ är en egenvektor. Därmed gäller följande

(a) om $\mathbb{E}_{F,0} = N(F) = \{\mathbf{0}\}$ så är $\mathbb{E}_{F,2} = V(F) = \mathbb{E}$ och alla vektorer är egenvektorer med egenvärde 2 (d v s F är en sträckning faktorn 2).

(b) om $\dim N(F) > 0$ så är (fortfarande) $\mathbb{E}_{F,0} = N(F)$ och $\mathbb{E}_{F,2} = V(F) = N(F)^\perp$ p g a symmetrin (d v s F är en ortogonalprojektion på det ortogonala komplementet till $N(F)$ följt av en sträckning faktorn 2).