LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Ulf Janfalk & Thomas Karlsson

Kurskod: TATA24
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra 2009–12–21, 14–19.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.
Resultatet meddelas via e-post. För godkänt räcker 8 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ht2009 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas). Markera detta genom att skriva "G" i rutan för uppgift 1.
Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar läggs ut efter skrivtidens slut på

http://www.mai.liu.se/~uljan/kurser/TATA24/

(3 p) 1. Bestäm ekvationen på normalform för det plan Π som innehåller linjen

$$L:\ \underline{e}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t\,\underline{e}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

och som innehåller punkten $(3, 0, 1)$. Ange sedan den ortogonala projektionen av punkten $(-1, -4, 4)$ dels på planet Π, dels på linjen L.

(1 p) 2. (a) Formulera tre, i kursen ingående, centrala satser om linjära avbildningar.

(2 p) (b) Bevisa en av de satser du formulerade ovan.

(3 p) 3. Bestäm de lösningar till differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 3x_2 \\ x_2' = 2x_1 + x_2 \end{cases}$$

sådana att $\lim_{t\to\infty} e^t x_1(t) = 1$.

(3 p) 4. Sätt $\mathbf{v} = (4, 3, 1, 1)$ och

$$\mathbb{W} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{E}^4\colon \begin{array}{r} x_1 + x_2 - x_3 \phantom{{}+x_4} = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Bestäm $\min_{\mathbf{w}\in\mathbb{W}} |\mathbf{v} - \mathbf{w}|$ och ange för vilket $\mathbf{w} \in \mathbb{W}$ som minsta värdet antas.

(3 p) 5. Betrakta den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ som i standardbasen har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm bas och dimension för nollrum respektive värderum. Ange en bas för $\mathbb{R}^4$ där så många som möjligt av basvektorerna från nollrum och värderum ingår.

VÄND!

(3 p) 6. Låt $r > 0$ och betrakta ekvationerna nedan:

$$Q_1 = 9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 = 5, \qquad Q_2 = x_1^2 + x_2^2 = r^2.$$

Avgör vilken typ av kurva som respektive ekvation beskriver. Bestäm sedan, för varje $r > 0$, antalet skärningspunkter mellan kurvorna.

(3 p) 7. Låt $\mathbb{E}$, $\dim \mathbb{E} = n$ var ett euklidiskt rum och $\mathbb{U}$, $\dim \mathbb{U} < n$ ett underrum av $\mathbb{E}$. Låt $P_{\mathbb{U}^\perp} \colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ vara den linjära avbildningen ortogonalprojektion på $\mathbb{U}^\perp$ och definiera $F \colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ genom $F(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2P_{\mathbb{U}^\perp}(\mathbf{v})$. Visa att F är både symmetrisk och isometrisk samt ange samtliga egenvärden och tillhörande egenrum till F.
$\left(\mathbb{U}^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbb{E} \colon \mathbf{v} \text{ ortogonal mot alla } \mathbf{u} \in \mathbb{U}\}\right)$

Lösningsförslag till TATA24, Linjär algebra, 2009–12–21

1. Låt $P_0 = (1,3,3)$, $P_1 = (3,0,1)$. Då fås

$$\overline{P_0P_1} = \underline{e}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} - \underline{e}\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix}2\\-3\\-2\end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_\Pi \parallel \underline{e}\begin{pmatrix}2\\-3\\-2\end{pmatrix} \times \underline{e}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix}-4\\-8\\8\end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \Pi\colon x + 2y - 2z = D,\ P_0 \in \Pi \Longrightarrow 1 + 2\cdot 3 - 2\cdot 3 = 1 = D.$$

Låt $P_2 = (-1,-4,4)$. För att beräkna projektionen P_2 i Π drar vi den normal till Π som går genom P_2 och beräknar dess skärningspunkt P_Π med Π genom insättning i ekvationen för Π.

$$N_{P_2}\colon \underline{e}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix}-1\\-4\\4\end{pmatrix} + t\underline{e}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}.$$

$$(-1+t) + 2(-4+2t) - 2(4-2t) = 9t - 17 = 1 \iff t = 2 \Longrightarrow$$

$$\overline{OP_\Pi} = \underline{e}\begin{pmatrix}-1\\-4\\4\end{pmatrix} + 2\underline{e}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

För att beräkna projektionen P_L av P_2 på L ortogonalprojicerar vi $\overline{P_0P_2}$ på L:s riktningsvektor och beräknar sedan $\overline{OP_L}$ som $\overline{OP_0}+$ denna projektion (se figur 1.33, sid 34 i kursboken):

$$\overline{P_0P_2} = \underline{e}\begin{pmatrix}-1\\-4\\4\end{pmatrix} - \underline{e}\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix}-2\\-7\\1\end{pmatrix},$$

$$\overline{P_0P_2}_{\parallel L} = \frac{1}{3^2}\left(\underline{e}\begin{pmatrix}-2\\-7\\1\end{pmatrix}\middle|\underline{e}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right)\underline{e}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = -\underline{e}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \overline{OP_L} = \underline{e}\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix} - \underline{e}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Svar: $P_\Pi = (1,0,0)$, $P_L = (-1,2,1)$.

2. Se kursboken, kapitel 6.

3. Skriv systemet på matrisform och beräkna koefficientmatrisens egenvärden och egenvektorer:

$$X' = \begin{pmatrix}2 & 3\\2 & 1\end{pmatrix}X = AX,$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix}2-\lambda & 3\\2 & 1-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda-4)(\lambda+1) = 0 \iff \lambda = 4,\ -1$$

$$\underline{\underline{\lambda = 4:}}\quad \left(\begin{array}{cc|c}-2 & 3 & 0\\2 & -3 & 0\end{array}\right) \Longrightarrow X_4 = t\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\lambda=-1:}}\quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{-1} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X(t) = C_1 e^{4t}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e^t x_1(t) = 3C_1 e^{5t} - C_2 \to 1 \text{ då } t \to \infty$$

$$\Longrightarrow C_1 = 0,\ C_2 = -1 \Longrightarrow X(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4. Bestäm först en bas för $\mathbb{W}$ genom att skriva systemet på matrisform och lösa det.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s-t \\ -s+t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Utgående från detta konstruerar vi en ON-bas:

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{e}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\|\mathbf{f}_1} = \underline{e}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\left(\underline{e}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\middle|\underline{e}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\underline{e}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{e}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{e}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_{\|\mathbb{W}} = (\mathbf{v}|\mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 + (\mathbf{v}|\mathbf{f}_2)\,\mathbf{f}_2 = \frac{1}{3}\left(\underline{e}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\middle|\underline{e}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\underline{e}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} +$$

$$+\frac{1}{3}\left(\underline{e}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\middle|\underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\,\underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \mathbf{v}_{\perp\mathbb{W}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\|\mathbb{W}} = \underline{e}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \underline{e}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Enligt sats 5.3.11, sid 132 fås det minsta värdet för $\mathbf{w} = \mathbf{v}_{\|\mathbb{W}}$ och det minsta värdet blir då $\left|\mathbf{v}_{\perp\mathbb{W}}\right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{15}$.

5. Enligt sats 6.5.4, sid 160 fås $V(F)$ som höljet av A:s kolonnvektorer $\mathbf{v}_i$. Vi studerar därför beroendeekvationen för dessa. Detta leder till ekvationen $AX = 0$ vilket är den ekvation som skall lösas för att beräkna $N(F)$. Vi studerar också ekvationen "linjärkombination av kolonnvektorerna = godtycklig vektor" för att erhålla ekvation(er) som beskriver $V(F)$. Vi får

$$\lambda_1\mathbf{v}_1+\lambda_2\mathbf{v}_2+\lambda_3\mathbf{v}_3+\lambda_4\mathbf{v}_4=\mathbf{0},\ \mathbf{x}\Longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & x_1\\ -1 & 3 & 2 & 1 & 0 & x_2\\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & x_3\\ 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & x_4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & x_1\\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & x_1+x_2\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & x_1+x_3\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -x_1+x_4\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & x_1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & x_1-x_4\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -x_1+x_2+2x_4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x_1-x_2+x_3-2x_4\end{array}\right)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\\ 0\end{pmatrix},\ \text{d v s}\ \ \mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_3\quad\text{och}$$

$$N(F)=[(1,1,-1,0)],\quad V(F)=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4\colon 2x_1-x_2+x_3-2x_4=0\}.$$

Ur ovanstående får vi att $\dim N(F)=1$, $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_4$ är en bas för $V(F)$ och därmed är $\dim V(F)=3$. Då $2{\cdot}1-1+(-1)-2{\cdot}0=0$ följer det att $N(F)\subset V(F)$. Därmed finns ingen bas för $\mathbb{R}^4$ bestående av basvektorer för $N(F)$ respektive $V(F)$. Som ny bas kan vi välja $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_4$ och fylla ut med en vektor vilken som helst som ej tillhör $V(F)$, t ex $(1,0,0,0)=\mathbf{e}_1$. Att dessa fyra är linjärt oberoende följer direkt om vi studerar beroendeekvationen

$$\lambda_1\mathbf{v}_1+\lambda_2\mathbf{v}_2+\lambda_3\mathbf{v}_4+\lambda_4\mathbf{e}_1=\mathbf{0}\iff V(F)\ni\lambda_1\mathbf{v}_1+\lambda_2\mathbf{v}_2+\lambda_3\mathbf{v}_4=-\lambda_4\mathbf{e}_1\notin V(F)$$

såvida inte $\lambda_4=0$, d v s den enda möjligheten är att $\lambda_1\mathbf{v}_1+\lambda_2\mathbf{v}_2+\lambda_3\mathbf{v}_4=\mathbf{0}$. Men då dessa är linjärt oberoende så är även $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. Följaktligen är $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_4,\mathbf{e}_1$ linjärt oberoende, d v s vi har rätt antal oberoende vektorer och därmed en bas enligt sats 4.4.18, sid 107.

6. $Q_2=r^2$ beskriver en cirkel med radie r. För att se vilken kurvtyp $Q_1=5$ bestämmer vi dess matris A och beräknar egenvärden och egenvektorer till denna.

$$A=\begin{pmatrix}9 & -2\\ -2 & 6\end{pmatrix},\quad \det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}9-\lambda & -2\\ -2 & 6-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-15\lambda+50=0\iff$$

$$\iff\lambda=\frac{15}{2}\pm\sqrt{\frac{225-200}{4}}=\frac{15\pm5}{2}=10,\ 5$$

$$\underline{\lambda=10:}\quad\left(\begin{array}{cc|c}-1 & -2 & 0\\ -2 & -4 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow X_{10}=t\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{\lambda = 5:}}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_5 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{\mathbf{f}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Med detta basbyte fås $Q_1 = 10y_1^2 + 5y_2^2 = 5$, d v s en ellips. Enligt sats 8.1.11, sid 203 gäller

$$5\,|\mathbf{u}|^2 \leq Q_1(\mathbf{u}) = 5 \leq 10\,|\mathbf{u}|^2 \iff \frac{1}{2} \leq |\mathbf{u}|^2 \leq 1 \iff \frac{1}{\sqrt{2}} \leq |\mathbf{u}| \leq 1,$$

d v s ellipsen tangeras inifrån av en cirkel med radie $1/\sqrt{2}$ och utifrån av en cirkel med radie 1 (jämför med figur 8.2 (b), sid 206). Följaktligen har vi två skärningspunkter för $r = 1/\sqrt{2}$ och $r = 1$, fyra skärningspunkter för $1/\sqrt{2} < r < 1$ och inga skärningspunkter för övriga r.

7. Alla $\mathbf{v} \in \mathbb{E}$ kan skrivas $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} + \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}$ där $\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} \in \mathbb{U}$ och $\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}} \perp \mathbb{U}$, d v s $\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}} \in \mathbb{U}^\perp$. Då fås för varje $\mathbf{v} \in \mathbb{E}$ att

$$\begin{aligned} F(\mathbf{v}) &= F(\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} + \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}) = F(\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}) + F(\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}) = \\ &= (\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} - 2\underbrace{P_{\mathbb{U}^\perp}(\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}})}_{\mathbf{0}}) + (\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}} - 2\underbrace{P_{\mathbb{U}^\perp}(\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}})}_{\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}}) = \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} - \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}. \end{aligned}$$

<u>Symmetri:</u> $(F(\mathbf{u})|\mathbf{v}) = (\mathbf{u}_{\|\mathbb{U}} - \mathbf{u}_{\perp\mathbb{U}}|\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} + \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}) = (\mathbf{u}_{\|\mathbb{U}}|\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}) - (\mathbf{u}_{\perp\mathbb{U}}|\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}})$ eftersom $(\mathbf{u}_{\|\mathbb{U}}|\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}) = (\mathbf{u}_{\perp\mathbb{U}}|\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}) = 0$. På samma sätt fås
$(\mathbf{u}|F(\mathbf{v})) = (\mathbf{u}_{\|\mathbb{U}} + \mathbf{u}_{\perp\mathbb{U}}|\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} - \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}) = (\mathbf{u}_{\|\mathbb{U}}|\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}) - (\mathbf{u}_{\perp\mathbb{U}}|\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}})$, d v s
$(F(\mathbf{u})|\mathbf{v}) = (\mathbf{u}|F(\mathbf{v}))$ vilket är precis definitionen av symmetrisk avbildning.
<u>Isometri:</u> Pythagoras ger $|F(\mathbf{u})|^2 = |\mathbf{u}_{\|\mathbb{U}} - \mathbf{u}_{\perp\mathbb{U}}|^2 = |\mathbf{u}_{\|\mathbb{U}}|^2 + |\mathbf{u}_{\perp\mathbb{U}}|^2 = |\mathbf{u}|^2$, d v s F är isometrisk.
För $\mathbf{u} \in \mathbb{U}$ gäller $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\|\mathbb{U}}$ och $\mathbf{u}_{\perp\mathbb{U}} = \mathbf{0}$ så att $F(\mathbf{u}) = F(\mathbf{u}_{\|\mathbb{U}}) = \mathbf{u}_{\|\mathbb{U}} = \mathbf{u}$, d v s alla $\mathbf{u} \in \mathbb{U}$ är egenvektorer med egenvärde 1. På samma sätt fås att alla $\mathbf{v} \in \mathbb{U}^\perp$ är egenvektorer med egenvärde -1. Då $\dim\mathbb{U} + \dim\mathbb{U}^\perp = \dim\mathbb{E} = n$ följer att det inte finns fler egenvektorer eftersom de vi har räcker för att bilda en bas för $\mathbb{U}$.