LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Ulf Janfalk & Thomas Karlsson

Kurskod: TATA24
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra 2009–08–18, 14–19.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.
Resultatet meddelas vi e-post. För godkänt räcker 8 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ht2008 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas). Markera detta genom att skriva "G" i rutan för uppgift 1.
Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar läggs ut efter skrivtidens slut på

http://www.mai.liu.se/~uljan/kurser/TATA24/

(3 p) 1. Bestäm en bas för rummet

$$\mathbb{U}=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4\colon \begin{array}{l} x_1 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{array}\right\}.$$

Fyll ut till en bas för $\mathbb{V}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4\colon x_1-x_2+2x_3=0\}$ och fyll slutligen ut denna till en bas för $\mathbb{R}^4$.

(1 p) 2. (a) Definiera begreppen linjärt oberoende, ON-mängd och ON-bas.

(2 p) (b) Bevisa att en ON-mängd är linjärt oberoende.

(3 p) 3. Lös nedanstående system av differentialekvationer:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 4x_2 \\ x_2' = 2x_1 + 3x_2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_1(t) \to 0 \text{ då } t \to \infty \\ x_1(0) = 2 \end{cases}.$$

(3 p) 4. Låt $F\colon\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ vara en linjär avbildning som i standardbasen har matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestäm en bas för $N(F)\cap V(F)$.

(3 p) 5. Låt $k>0$ och betrakta ekvationerna nedan

$$Q_1 = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 1, \qquad Q_2 = x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2 = k.$$

Avgör vilken typ av kurva som respektive ekvation beskriver. Bestäm sedan, för varje $k>0$, antalet skärningspunkter mellan kurvorna.

VÄND!

(3 p) 6. Låt $\mathbf{v} = (1, -1, 5, 0, 2) \in \mathbb{E}^5$ och

$$\mathbb{U} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{E}^5 \colon \begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & & & = & 0, \\ x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & & & = & 0 \\ & & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 0 \end{array} \right\}.$$

Dela upp $\mathbf{v}$ i komponenter så att $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} + \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}$ där $\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} \in \mathbb{U}$ och $\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}$ är ortogonal mot $\mathbb{U}$.

(3 p) 7. Antag att $F \colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ är en linjär avbildning på det euklidiska rummet $\mathbb{E}$ och som uppfyller att $F^2 = F$. Antag vidare att $N(F) \perp V(F)$. Visa att F är symmetrisk och beskriv egenrummen.

Lösningsförslag till TATA24, Linjär algebra, 2009–08–18

1. Ekvationerna kan parametriseras direkt och ger då

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s+2t \\ x_1+2x_3 = s+2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d v s $\mathbf{f}_1 = (-1,1,1,0)$ och $\mathbf{f}_2 = (2,2,0,1)$ spänner upp $\mathbb{U}$ och är linjärt oberoende och därmed en bas för $\mathbb{U}$. Fyll ut med $\mathbb{V} \ni \mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_4 = (0,0,0,1) \notin \mathbb{U}$. För att parametrisera ekvationen som definierar $\mathbb{V}$ behövs tre parametrar, d v s $\dim \mathbb{V} = 3$. Studera beroendeekvationenför $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$

$$\lambda_1\mathbf{f}_1 + \lambda_2\mathbf{f}_2 + \lambda_3\mathbf{f}_3 = \mathbf{0} \iff \underbrace{\lambda_1\mathbf{f}_1 + \lambda_2\mathbf{f}_2}_{\in\mathbb{U}} = -\lambda_3\mathbf{f}_3.$$

Då $\mathbf{f}_3 \notin \mathbb{U}$ fås att $\lambda_3 = 0$ och därur att $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ eftersom $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ är linjärt oberoende. Följaktligen är $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ en bas enligt satsen om rätt antal element. Slutligen fyller vi ut med en vektor som inte ligger i $\mathbb{V}$, t ex $\mathbf{f}_4 = \mathbf{e}_1 = (1,0,0,0)$. Ett identiskt resonemang enligt ovan ger att dessa fyra är linjärt oberoende och en bas enligt satsen om rätt antal element.

2. (a) $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k$ är linjärt oberoende om beroendeekvationen

$$\lambda_1\mathbf{f}_1 + \lambda_2\mathbf{f}_2 + \dots + \lambda_k\mathbf{f}_k = \mathbf{0}$$

endast har lösningen $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.
$\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k\}$ är en ON-mängd om

$$(\mathbf{f}_i|\mathbf{f}_j) = \begin{cases} 1 & \text{om } i = j \\ 0 & \text{om } i \neq j \end{cases}. \tag{1}$$

$\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k$ är en ON-bas om $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k\}$ är en ON-mängd och en bas i det aktuella rummet.

(b) Antag att $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k$ är en ON-mängd. Studera beroendeekvationen, $\lambda_1\mathbf{f}_1 + \lambda_2\mathbf{f}_2 + \dots + \lambda_k\mathbf{f}_k = \mathbf{0}$. Då gäller att

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{0}|\mathbf{f}_1) = (\lambda_1\mathbf{f}_1 + \lambda_2\mathbf{f}_2 + \dots + \lambda_k\mathbf{f}_k|\mathbf{f}_1) = \\ &= \lambda_1(\mathbf{f}_1|\mathbf{f}_1) + \lambda_2(\mathbf{f}_2|\mathbf{f}_1) + \dots + \lambda_k(\mathbf{f}_k|\mathbf{f}_1) \overset{(1)}{=} \lambda_1. \end{aligned}$$

Fortsätt på samma sätt med $\mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k$ och vi får att övriga koefficienter är 0, d v s $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k$ är linjärt oberoende. VSB.

3. Skriv på matrisform och beräkna egenvärden och egenvektorer.

$$X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = AX,$$

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 1\text{-}\lambda & 4 \\ 2 & 3\text{-}\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = -1,\ 5$$

$$\underline{\underline{\lambda = -1}} : \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{-1} = t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 5}} : \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_5 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

Därur följer att lösningen kan skrivas

$$X = C_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Villkoret $x_1(t) \to 0$ då $t \to \infty$ ger att $C_2 = 0$ eftersom $e^{5t} \to \infty$ då $t \to \infty$. Detta ger då att $x_1(0) = 2C_1 = 2 \iff C_1 = 1$ så att $X = e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4. För att bestämma nollrummet löser vi $AX = 0$. Då värderummet är höljet av kolonnvektorerna så blir beroendeekvationen för dessa även den $AX = 0$. För att få $V(F)$ representerat som ett lösningsrum studerar vi också en linjärkombination av kolonnvektorerna lika med en godtycklig vektor. Vi får systemen

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & y_2 \\ -2 & 0 & -2 & 2 & 0 & y_3 \\ -1 & -1 & -2 & 3 & 0 & y_4 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2y_1 + y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_1 + y_2 + y_4 \end{array}\right).$$

Ur detta fås att koordinaterna för ett element i $N(F)$ kan skrivas

$$X = \begin{pmatrix} -s+t \\ -s+2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Om vektorn $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in V(F)$ så är systemet med y:na i högerledet lösbart, d v s $2y_1 + y_3 = 0$, $y_1 + y_2 + y_4 = 0$ och därmed $V(F) = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{c} 2y_1 + y_3 = 0 \\ y_1 + y_2 + y_4 = 0 \end{array} \right\}$. Sätt in koordinaterna för ett element i $N(F)$ i dessa ekvationer.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2(-s+t) + s = & -s + 2t = 0 \\ (-s+t) + (-s+2t) + t = & -2s + 4t = 0 \end{array} \right. \iff s = 2t$$

som insatt i X ger

$$X = \begin{pmatrix} -2t+t \\ -2t+2t \\ 2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ 2t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d v s alla vektorer i $N(F)\cap V(F)$ kan skrivas på formen $t(-1,0,2,1)$ så att vektorn $(-1,0,2,1)$ är en bas i $N(F)\cap V(F)$.

5. Skriv på matrisform och beräkna egenvärdena

$$Q_1=(x_1\ x_2)\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=X^tA_1X=1,$$

$$Q_2=(x_1\ x_2)\begin{pmatrix}1 & -3\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=X^tA_2X=k$$

$$\det(A_1-\lambda E)=\begin{vmatrix}3-\lambda & -1\\ -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2-1=0\iff\lambda=3\pm1=4,\ 2$$

$$\det(A_2-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -3\\ -3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-9=0\iff\lambda=1\pm3=4,\ -2.$$

Beräkna egenvektorerna till Q_1 och Q_2.

$$Q_1:\ \underline{\underline{\lambda=4}}:\left(\begin{array}{cc|c}-1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow X_4=t\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

$$Q_1:\ \underline{\underline{\lambda=2}}:\left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow X_2=t\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$Q_2:\ \underline{\underline{\lambda=4}}:\left(\begin{array}{cc|c}-3 & -3 & 0\\ -3 & 3 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow X_4=t\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

$$Q_1:\ \underline{\underline{\lambda=-2}}:\left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow X_{-2}=t\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},$$

d v s de två kvadratiska formerna har samma egenvektorer. Sätt

$$\mathbf{f}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix},\ \mathbf{f}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\Longrightarrow\underline{\mathbf{f}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\Longrightarrow$$
$$Q_1(\underline{\mathbf{f}}Y)=4y_1^2+2y_2^2=1,\quad Q_2(\underline{\mathbf{f}}Y)=4y_1^2-2y_2^2=k.$$

Då Q_1 är positivt definit så definierar ekvationen en ellips. Q_2 är indefinit och ekvationen definierar därför en hyperbel för alla $k\neq0$. (För $k=0$ fås $4y_1^2-2y_2^2=0\iff 2y_1^2-y_2^2=\left(\sqrt{2}y_1-y_2\right)\left(\sqrt{2}y_1+y_2\right)0\iff y_2=\sqrt{2}y_1$ eller $y_2=-\sqrt{2}y_1$, d v s två korsande linjer vilka också utgör hyperbelns asymptoter.)
För att bestämma skärningspunkterna löses ekvationssystemet

$$\begin{cases}4y_1^2+2y_2^2=1\\ 4y_1^2-2y_2^2=k\end{cases}\iff\begin{cases}4y_1^2+2y_2^2= & 1\\ 8y_1^2 & =k+1\end{cases}\iff\begin{cases}y_2^2=\dfrac{1-k}{4}\\ y_1^2=\dfrac{k+1}{8}\end{cases}.$$

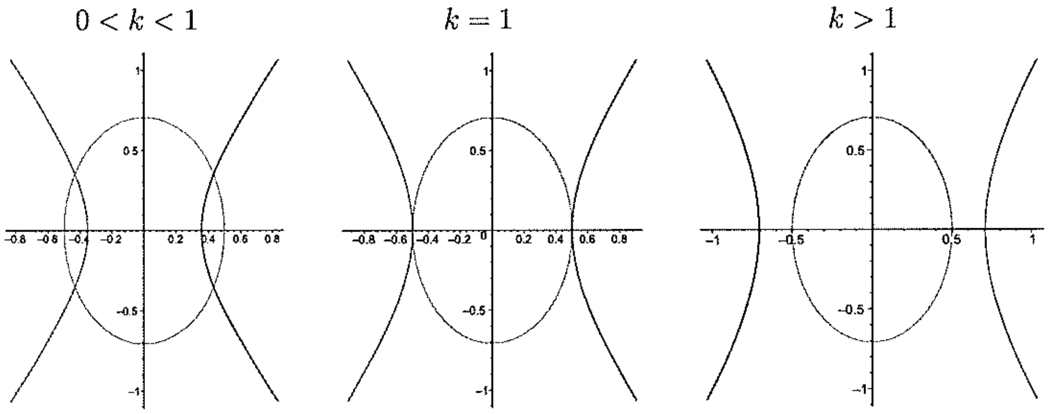
Med det extra villkoret $k > 0$ fås att för $0 < k < 1$ gäller

$$\begin{cases} y_1 = \pm\sqrt{\dfrac{k+1}{8}} \\ y_2 = \pm\sqrt{\dfrac{1-k}{4}} \end{cases} \iff (y_1, y_2) = \pm\left(\sqrt{\frac{k+1}{8}}, \pm\sqrt{\frac{1-k}{4}}\right),$$

d v s fyra skärningspunkter.

För $k = 1$ fås $(y_1, y_2) = \pm\left(\sqrt{\frac{2}{8}}, \pm\sqrt{\frac{1-1}{4}}\right) = \left(\pm\frac{1}{2}, 0\right)$, d v s två skärningspunkter.

För $k > 1$ saknar systemet lösning vilket innebär att kurvorna inte skär varann.



Figur 1: Kurvorna ritade i egenbasen för olika värden på $k > 0$.

6. Lös först systemet (på matrisform) för att bestämma en bas i $\mathbb{U}$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}X = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -s+2t \\ -t \\ -s+t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = s\mathbf{u}_1 + t\mathbf{u}_2,$$

d v s $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ är en bas för $\mathbb{U}$. Sätt $\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, -1, 0)$ och ortogonalisera $\mathbf{u}_2$.

$$\mathbf{u}_{2_{\perp \mathbf{f}_1}} = \mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2|\mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_2 = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = (\mathbf{v}|\mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 + (\mathbf{v}|\mathbf{f}_2)\,\mathbf{f}_2 = \frac{1}{3}\cdot 6\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\cdot 4\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\5\\0\\2\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\-1\\1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\0\\3\\1\\1\end{pmatrix}$$

7. F är symmetrisk om $(F(\mathbf{u})|\mathbf{v}) = (\mathbf{u}|F(\mathbf{v}))$ för alla $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}$. Observera först att $F^2 = F$ leder till att $\mathbf{u} - F(\mathbf{u}) \in N(F)$ eftersom $F(\mathbf{u} - F(\mathbf{u})) = F(\mathbf{u}) - F(F(\mathbf{u})) = F(\mathbf{u}) - F^2(\mathbf{u}) = F(\mathbf{u}) - F(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

$$\begin{aligned}(F(\mathbf{u})|\mathbf{v}) &= (F(\mathbf{u})|\mathbf{v} - F(\mathbf{v}) + F(\mathbf{v})) = \overbrace{(\underbrace{F(\mathbf{u})}_{\in V(F)}\,|\,\underbrace{\mathbf{v} - F(\mathbf{v})}_{\in N(F)})}^{=0,\ N(F)\perp V(F)} + (F(\mathbf{u})|F(\mathbf{v})) = \\ &= (F(\mathbf{u}) - \mathbf{u} + \mathbf{u}|F(\mathbf{v})) = \underbrace{(F(\mathbf{u}) - \mathbf{u}|F(\mathbf{v}))}_{=0,\ N(F)\perp V(F)} + (\mathbf{u}|F(\mathbf{v})) = \\ &= (\mathbf{u}|F(\mathbf{v})),\end{aligned}$$

d v s F är symmetrisk. VSB
$N(F)$ är egenrummet till egenvärdet 0. Då F är symmetrisk så är F diagonaliserbar enligt spektralsatsen och egenrummen är ortogonala. Återstår att visa att $V(F)$ är egenrum till egenvärdet 1. Tag $\mathbf{u} \in V(F)$. Då finns $\mathbf{v} \in \mathbb{E}$ så att $F(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$ och då $F^2 = F$ fås

$$F(\mathbf{u}) = F^2(\mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) = \mathbf{u},$$

d v s $\mathbf{u}$ är en egenvektor med egenvärde 1. Då $\mathbf{u}$ var ett godtyckligt element i $V(F)$ följer det $V(F)$ är egenrum till egenvärdet 1.