LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Ulf Janfalk & Thomas Karlsson

Tentamen i Linjär algebra (TATA24/TEN1) 2009–04–14, 8–13.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.
Resultatet meddelas vi e-post. För godkänt räcker 8 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ht2008 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas). Markera detta genom att skriva "G" i rutan för uppgift 1.
Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar läggs ut efter skrivtidens slut på

http://www.mai.liu.se/~uljan/kurser/TATA24/

(3 p) 1. Bestäm $a \in \mathbb{R}$ så att linjerna

$$\begin{cases} x = -1 + s \\ y = \quad a - s \\ z = \quad 4 - 3s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} x = -2 - s \\ y = \quad 6 + 2s \\ z = \quad 3 + s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}$$

skär varandra och ange skärningspunkten. Bestäm sedan ekvationen för det plan som innehåller båda linjerna.

(1 p) 2. (a) Definiera begreppen egenvärde och egenvektor till en linjär avbildning.

(1 p) (b) Formulera en sats om egenvektorer till skilda egenvärden för en *symmetrisk* linjär avbildning.

(1 p) (c) Bevisa satsen i (b).

(3 p) 3. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definieras av att

$$F(1,1,0) = (0,0,0), \quad F(0,1,0) = (-1,2,1), \quad F(0,1,1) = (-4,8,4).$$

Bestäm matrisen i standardbasen samt baser i noll- respektive värderum till F.

(3 p) 4. Låt $\mathbf{v} = (1,1,-1,0) \in \mathbb{E}^4$ och $\mathbb{U} = [(2,1,0,1),(4,3,1,1)] \subset \mathbb{E}^4$. Dela upp $\mathbf{v}$ i komponenter

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel \mathbb{U}} + \mathbf{v}_{\perp \mathbb{U}} \quad \text{där} \quad \mathbf{v}_{\parallel \mathbb{U}} \in \mathbb{U}, \quad \mathbf{v}_{\perp \mathbb{U}} \perp \mathbb{U} \quad \text{(förstås).}$$

(3 p) 5. Visa att polynomen

$$p_1 = 2 + x + x^2, \quad p_2 = 1 - x + x^2, \quad p_3 = 3 + x + 2x^2$$

är en bas i $\mathbb{P}_2$. Ange koordinaterna för 1, x och x^2 i basen p_1, p_2, p_3.

(3 p) 6. Betrakta kurvan i planet $5x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 = 2$. Bestäm minsta avståndet från kurvan till linjen $x_1 + x_2 = 3\sqrt{2}$. Ange också koordinaterna för motsvarande punkter på linjen och kurvan i de ursprungliga x_1x_2-koordinatsystemet.

(3 p) 7. Låt A vara en $n \times n$-matris sådan att $AX = 0$ endast har den triviala lösningen. Visa att den avbildning $F\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ som har A^tA som avbildningsmatris i standardbasen, endast har positiva egenvärden.

Lösningsförslag till TATA24, Linjär algebra, 2009–04–14

1. Sätt uttrycken för de två linjerna lika med varann och lös det uppkomna ekvationssystemet

$$\begin{cases} -1+s=-2-t \\ a-s=6+2t \\ 4-3s=3+t \end{cases} \iff \begin{cases} s+t=-1 \\ -s-2t=6-a \\ -3s-t=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} s+t=-1 \\ -t=5-a \\ 2t=-4 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} s+t=-1 \\ t=a-5 \\ 0=6-2a \end{cases},$$

d v s $a=3$ krävs för att systemet skall vara lösbart. Lösningen blir då $s=1$, $t=-2$ så att skärningspunkten blir $(-1+1,3-1,4-3)=(0,2,1)$. Beräkna sedan kryssprodukten av linjernas riktningsvektorer.

$$\underline{e}\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}\times\underline{e}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}=\underline{e}\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}=\mathbf{n}.$$

Utnyttjar vi att, t ex $(-2,6,3)\in$ planet får vi att det sökta planets ekvation blir

$$5x+2y+z=5\cdot(-2)+2\cdot 6+3=5.$$

2. (a) Se boken, Definition 7.1.1, sid 179.

   (b) Se boken, Sats 7.3.1, sid 188.

   (c) Se boken, Bevis av Sats 7.3.1, sid 188.

3. Beräkna standardbasevektorernas bilder:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{e}_1)&=F(1,0,0)=F(1,1,0)-F(0,1,0)=(0,0,0)-(-1,2,1)=(1,-2,-1)\\ F(\mathbf{e}_2)&=F(0,1,0)=(-1,2,1)\\ F(\mathbf{e}_3)&=F(0,0,1)=F(0,1,1)-F(0,1,0)=(-4,8,4)-(-1,2,1)=(-3,6,3)\Longrightarrow \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow A=\begin{pmatrix}1&-1&-3\\-2&2&6\\-1&1&3\end{pmatrix}.$$

Då värderummet är höljet av kolonnvektorerna blir beroendeekvationen för dessa densamma som $AX=\mathit{0}$ som vi löser för att beräkna nollrummet. Vi ser direkt att kolonnvektorerna är parallella så att $V(F)=[(-1,2,1)]$ och att $AX=\mathit{0}$ efter eliminering ger två nollrader och ekvationen $-x_1+x_2+3x_3=0$. Parametrisering på vanligt sätt ger

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s+3t\\s\\t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix},\quad \text{d v s } N(F)=[(1,1,0),(3,0,1)].$$

Det är klart att de genererande vektorerna är bas i respektive rum.

4. Bestäm ON-bas i $\mathbb{U}$. Sätt $\mathbf{f}_1 = (2,1,0,1)/\sqrt{6}$ och ortogonalisera $\mathbf{u}_2 = (4,3,1,1)$ med avseende på $\mathbf{f}_1$.

$$\mathbf{u}_{2_{\|\mathbf{f}_1}} = (\mathbf{u}_2|\mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 = \frac{12}{6}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_{2_{\|\mathbf{f}_1}} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_{2_{\|\mathbf{f}_1}} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\3\\1\\1\end{pmatrix} - 2\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = (\mathbf{v}|\mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 + (\mathbf{v}|\mathbf{f}_2)\,\mathbf{f}_2 = \frac{3}{6}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix} + 0\cdot\mathbf{f}_2$$

$$\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\2\\-2\\0\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} + \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}} = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\-1\end{pmatrix}.$$

Problemet går utmärkt att lösa med minsta-kvadratmetoden också.

5. Skriv polynomen på vektorform, $\underline{\mathbf{x}} = (1\ x\ x^2) =$ standardbasen i $\mathbb{P}_2$:

$$p_1 = 2 + x + x^2 = \underline{\mathbf{x}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \quad p_2 = \underline{\mathbf{x}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \quad p_3 = \underline{\mathbf{x}}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Ställ upp beroendeekvationen för dessa och skriv den på matrisform. Koefficientmatrisen blir då densamma som den framtida transformationsmatrisen T. Då vi kommer att behöva dess invers kan vi genom att beräkna den samtidigt visa att p_1, p_2, p_3 är linjärt oberoende och därmed en bas enligt satsen om rätt antal element. Vi får

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&3&1&0&0\\1&-1&1&0&1&0\\1&1&2&0&0&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&0&0&1\\0&1&1&-1&0&2\\0&0&1&-2&1&3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&-1&-4\\0&1&0&1&-1&-1\\0&0&1&-2&1&3\end{array}\right),$$

dvs T är inverterbar vilket visar att p_1, p_2, p_3 är en bas. Bassambandet ger

$$\underline{\mathbf{p}} = (p_1\ p_2\ p_3) = \underline{\mathbf{x}}T \iff \underline{\mathbf{x}} = (1\ x\ x^2) = \underline{\mathbf{p}}T^{-1} = \underline{\mathbf{p}}\begin{pmatrix}3&-1&-4\\1&-1&-1\\-2&1&3\end{pmatrix} \iff$$

$$1=\underline{\mathbf{p}}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix},\quad x=\underline{\mathbf{p}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad x^2=\underline{\mathbf{p}}\begin{pmatrix}-4\\-1\\3\end{pmatrix}.$$

6. Skriv på matrisform och beräkna egenvärden och egenvektorer:

$$Q(\mathbf{u})=Q(\underline{\mathbf{e}}X)=5x_1^2+6x_1x_2+5x_2^2=(x_1\ x_2)\begin{pmatrix}5&3\\3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=2,$$

$$\begin{vmatrix}5-\lambda&3\\3&5-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)^2-9=(5-\lambda-3)(5-\lambda+3)=(2-\lambda)(8-\lambda)=0\iff$$

$$\iff\lambda=2,\ 8$$

$$\underline{\underline{\lambda=2}}:\quad\left(\begin{array}{cc|c}3&3&0\\3&3&0\end{array}\right)\iff X_2=t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\quad \mathbf{f}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\lambda=8}}:\quad\left(\begin{array}{cc|c}-3&3&0\\3&-3&0\end{array}\right)\iff X_8=t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad \mathbf{f}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$Q(\mathbf{u})=Q(\underline{\mathbf{f}}Y)=2y_1^2+8y_2^2=2\iff y_1^2+4y_2^2=1,$$

$$x_1+x_2=(1\ 1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=(1\ 1)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=(0\ \sqrt{2})\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=$$

$$=\sqrt{2}y_2=3\sqrt{2}\iff y_2=3.$$

I en ON-bas av egenvektorer transformeras alltså problemet till att bestämma minsta avståndet mellan ellipsen $y_1^2+4y_2^2=1$ och linjen $y_2=3$. De sökta punkterna blir då $P_1=\left(0,\frac{1}{2}\right)$ (ellipsen) och $P_2=(0,3)$ (linjen) i det nya koordinatsystemet så att avståndet blir $3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$. Ortsvektorerna för punkterna är

$$\overline{OP}_1=\frac{1}{2}\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\mathbf{f}_2=\frac{1}{2\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad \overline{OP}_2=3\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=3\mathbf{f}_2=\frac{3}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

så att $P_1=\left(\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ och $P_2=\left(\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ i det ursprungliga koordinatsystemet.

7. Observera att $(A^tA)^t=A^t(A^t)^t=A^tA$, d v s A^tA är symmetrisk. Studera den kvadratiska form som har A^tA som matris.

$$Q(\mathbf{u})=Q(\underline{\mathbf{e}}X)=X^tA^tAX=AX^tAX=(\underline{\mathbf{e}}AX|\underline{\mathbf{e}}AX)=(F(\mathbf{u})|F(\mathbf{u}))=$$

$$=|F(\mathbf{u})|^2\geq 0.$$

Enligt förutsättningarna gäller att $AX=0$ endast har den triviala lösningen, d v s $F(\mathbf{u})=\mathbf{0}\iff\mathbf{u}=\mathbf{0}$. Följaktligen är Q positivt definit och egenvärdena positiva

enligt Sats 8.1.9, sid 200.
Påståendet kan också visas direkt. Låt $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}\, X$ vara en egenvektor till F med egenvärde λ. Då är

$$
\begin{aligned}
& F(\mathbf{u}) = F(\underline{\mathbf{e}}\, X) = \underline{\mathbf{e}}\, A^t A X = \lambda \underline{\mathbf{e}}\, X = \lambda \mathbf{u} \Longrightarrow \\
& \Longrightarrow (\mathbf{u} | F(\mathbf{u})) = \begin{cases} X^t(\lambda X) = \lambda X^t X = \lambda\, (\underline{\mathbf{e}}\, X | \underline{\mathbf{e}}\, X) = \lambda\, |\mathbf{u}|^2 \\ X^t A^t A X = A X^t A X = (\underline{\mathbf{e}}\, A X | \underline{\mathbf{e}}\, A X) = |\underline{\mathbf{e}}\, A X|^2 \end{cases} \Longrightarrow \\
& \Longrightarrow \lambda = \frac{|\underline{\mathbf{e}}\, A X|^2}{|\mathbf{u}|^2} > 0
\end{aligned}
$$

ty $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}\, X \neq \mathbf{0}$ och då är $\underline{\mathbf{e}}\, A X \neq \mathbf{0}$ enligt förutsättningarna.