LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Ulf Janfalk & Thomas Karlsson

Tentamen i Linjär algebra (TATA24/TEN1)2008–12–19, 14–19.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.
Resultatet meddelas vi e-post. För godkänt räcker 8 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ht2008 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas). Markera detta genom att skriva "G" i rutan för uppgift 1.
Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar läggs ut efter skrivtidens slut på

http://www.mai.liu.se/~uljan/kurser/TATA24/

(3 p) 1. Bestäm en bas och dimensionen för höljet nedan

$$\mathbb{M} = \left[\underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \subset \mathbb{R}^4.$$

Om $\dim \mathbb{M} < 4$, fyll ut basen i $\mathbb{M}$ till en bas för $\mathbb{R}^4$.

(1 p) 2. (a) Definiera begreppen linjär avbildning och avbildningsmatris till en linjär avbildning

(2 p) (b) Formulera och bevisa en sats om hur avbildningsmatrisen till en linjär avbildning $F\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ förändras vid basbyte.

(3p) 3. Låt $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ vara en bas för $\mathbb{R}^3$. Avbildningen $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definieras genom

$$\begin{aligned} F(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) &= 3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ F(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) &= 3\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2, \\ F(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) &= 2\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Bestäm F:s matris i den givna basen samt baser för F:s nollrum och värderum.

(3 p) 4. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & b \end{pmatrix}$$

i standardbasen. Bestäm talen a och b så att $(1,1,1)$ blir en egenvektor. Bestäm egenvärdet till $(1,1,1)$ och ange övriga egenvärden och egenvektorer. Är F diagonaliserbar?

VÄND!

(3 p) 5. Lös nedanstående system av differensekvationer:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4b_{n-1} \\ b_n = 2a_{n-1} + 3b_{n-1} \end{cases}, \quad \begin{matrix} a_0 = 2 \\ b_0 = 1 \end{matrix}.$$

Bestäm också $\lim_{n\to\infty} 5^{-n} a_n$.

(3 p) 6. Bestäm det polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ sådant att $y = p(x)$, i minstakvadrat-mening, bäst ansluter till nedanstående data:

x	-2	-1	0	1
y	-6	8	2	-4

7. Låt $\mathbb{V}$ vara ett linjärt rum av ändlig dimension och $F\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ en linjär avbildning sådan att $F^2 = F$, $F \neq$ 0-avbildningen och $F \neq$ identitetsavbildningen.

(1 p) (a) Visa att varje nollskild vektor i $V(F)$ är en egenvektor.

(1 p) (b) Visa att $N(F) \cap V(F) = \{\mathbf{0}\}$.

(1 p) (c) Visa att F är diagonaliserbar och ange dess egenvärden.

Lösningsförslag till TATA24, Linjär algebra, 2008–12–19

1. Låt $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5$ vara vektorerna som genererar $\mathbb{M}$. Bilda linjärkombination av dessa och sätt dels $= \mathbf{0}$, dels $=$ godtycklig vektor, d v s

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3 + \lambda_4\mathbf{u}_4 + \lambda_5\mathbf{u}_5 = \mathbf{0},\ \mathbf{x} \iff$$

$$\iff \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1&1&1&1&1&0&x_1\\ 1&2&3&0&2&0&x_2\\ 0&1&2&-1&3&0&x_3\\ 1&-1&-3&3&4&0&x_4\end{array}\right) \overset{\substack{r_2-r_1\\ r_4-r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1&1&1&1&1&0&x_1\\ 0&1&2&-1&1&0&x_2-x_1\\ 0&1&2&-1&3&0&x_3\\ 0&-2&-4&2&3&0&x_4-x_1\end{array}\right) \overset{\substack{r_3-r_2\\ r_4+2r_2}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1&1&1&1&1&0&x_1\\ 0&1&2&-1&1&0&x_2-x_1\\ 0&0&0&0&2&0&x_3-x_2+x_1\\ 0&0&0&0&5&0&x_4+2x_2-3x_1\end{array}\right) \overset{2r_4-5r_3}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1&1&1&1&1&0&x_1\\ 0&1&2&-1&1&0&x_2-x_1\\ 0&0&0&0&2&0&x_3-x_2+x_1\\ 0&0&0&0&0&0&2x_4-5x_3+9x_2-11x_1\end{array}\right).$$

Omstart med $\mathbf{u}_3$ och $\mathbf{u}_4$ i högerledet ger med samma radoperationer

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&1&1&1&1&0\quad x_1\\ 0&1&1&2&-1&0\quad x_2-x_1\\ 0&0&2&0&0&0\quad x_3-x_2+x_1\\ 0&0&0&0&0&0\quad 2x_4-5x_3+9x_2-11x_1\end{array}\right)$$

d v s $\mathbf{u}_3$ och $\mathbf{u}_4$ kan utses till löjliga element, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_5$ är linjärt oberoende och $\mathbb{M} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_5]$ enligt satsen om löjliga element (Sats 4.3.15, 97 i boken), d v s $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_5$ är en bas för $\mathbb{M}$. Följaktligen är $\dim \mathbb{M} = 3$.
Ekvationen "linjärkombination = godtycklig vektor" ger att

$$\mathbb{M} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4\colon -11x_1+9x_2-5x_3+2x_4 = 0\}$$

så som utfyllnad kan vi ta vilken som helst vektor som ej uppfyller ekvationen, t ex $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,0)$. Återstår att visa att $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_5, \mathbf{e}_1$ är linjärt oberoende,

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_5\mathbf{u}_5 + \lambda_6\mathbf{e}_1 = \mathbf{0} \iff \lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_5\mathbf{u}_5 = -\lambda_6\mathbf{e}_1$$

vilket ger att $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$ är enda möjligheten eftersom $[\mathbf{e}_1] \cap \mathbb{M} = \{\mathbf{0}\}$ och $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_5$ är linjärt oberoende. Därmed följer det att $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_5, \mathbf{e}_1$ är linjärt oberoende och en bas enligt Sats 4.4.18, sid 105.

2. (a) Se boken, Definition 6.2.1, sid 147 och Sats 6.3.1, sid 152

   (b) Se boken, Sats 6.4.1, sid 155

3. Utnyttja att F är linjär och lös ut $F(\mathbf{e}_1)$, $F(\mathbf{e}_2)$, $F(\mathbf{e}_3)$ ur det givna sambandet:

$$\left\{\begin{aligned} F(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2) &= F(\mathbf{e}_1) + F(\mathbf{e}_2) &&= 3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3,\\ F(\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3) &= F(\mathbf{e}_2) + F(\mathbf{e}_3) &&= 3\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2,\\ F(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3) &= F(\mathbf{e}_1) + F(\mathbf{e}_3) &&= 2\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 \end{aligned}\right. \overset{r_3-r_1}{\iff}$$

$$\iff \begin{cases} F(\mathrm{e}_1) + F(\mathrm{e}_2) \phantom{+F(\mathrm{e}_3)} = 3\mathrm{e}_1 + 4\mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_3, \\ \phantom{F(\mathrm{e}_1)+{}} F(\mathrm{e}_2) + F(\mathrm{e}_3) = 3\mathrm{e}_1 + 3\mathrm{e}_2, \\ \phantom{F(\mathrm{e}_1)} - F(\mathrm{e}_2) + F(\mathrm{e}_3) = -\mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2 + 2\mathrm{e}_3 \end{cases} \overset{(r_3+r_2)/2}{\iff}$$

$$\iff \begin{cases} F(\mathrm{e}_1) + F(\mathrm{e}_2) = 3\mathrm{e}_1 + 4\mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_3, \\ F(\mathrm{e}_2) + F(\mathrm{e}_3) = 3\mathrm{e}_1 + 3\mathrm{e}_2, \\ F(\mathrm{e}_3) = \mathrm{e}_1 + 2\mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_3 \end{cases} \overset{r_2-r_3}{\iff}$$

$$\iff \begin{cases} F(\mathrm{e}_1) + F(\mathrm{e}_2) = 3\mathrm{e}_1 + 4\mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_3, \\ F(\mathrm{e}_2) = 2\mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2 - \mathrm{e}_3, \\ F(\mathrm{e}_3) = \mathrm{e}_1 + 2\mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_3 \end{cases} \overset{r_1-r_2}{\iff}$$

$$\iff \begin{cases} F(\mathrm{e}_1) = \mathrm{e}_1 + 3\mathrm{e}_2 + 2\mathrm{e}_3 = \underline{\mathrm{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ F(\mathrm{e}_2) = 2\mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2 - \mathrm{e}_3 = \underline{\mathrm{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ F(\mathrm{e}_3) = \mathrm{e}_1 + 2\mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_3 = \underline{\mathrm{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \iff A_{\underline{\mathrm{e}}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beroendeekvationen för $F(\mathrm{e}_1)$, $F(\mathrm{e}_2)$, $F(\mathrm{e}_3)$ ger samma ekvationssystem som vid beräkningen av $N(F)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_0 = t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Följaktligen är $N(F) = [(3,1,-5)]$ och $F(\mathrm{e}_3) = \frac{1}{5}(3F(\mathrm{e}_1) + F(\mathrm{e}_2))$ så att $F(\mathrm{e}_3)$ är ett löjligt element och därmed $V(F) = [F(\mathrm{e}_1), F(\mathrm{e}_2)] = [(1,3,2),(2,1,-1)]$.

4. Beräkna $F(1,1,1)$:

$$F(1,1,1) = \underline{\mathrm{e}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathrm{e}} \begin{pmatrix} 3+a \\ 3 \\ 2+b \end{pmatrix} = \lambda \underline{\mathrm{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff$$
$$\iff \lambda = 3, a = 0, b = 1,$$

d v s $(1,1,1)$ är egenvektor med egenvärde 3.
Med $a = 0, b = 1$ fås

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{r_3-r_1}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ -(1-\lambda) & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{k_1+k_3}{=}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1\text{-}\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 3\text{-}\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(3-\lambda).$$

$$\lambda = 1: \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R},$$

d v s endast en-dimensionellt egenrum, $[(1,0,1)]$ till dubbelegenvärdet 1. Följaktligen är F inte diagonaliserbar.

5. $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ kan systemet skrivas $X_n = AX_{n-1}$, $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ där $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Lösningen blir då $X_n = A^n X_0$. Beräkning av egenvärden och egenvektorer ger egenvärdena 5 och -1 med egenvektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ respektive $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Därvid får vi transformationsmatrisen $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ med $T^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ så att

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n X_0 = T\begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} T^{-1} X_0 = \ldots = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4{\cdot}5^n + 2{\cdot}(-1)^n \\ 4{\cdot}5^n - (-1)^n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$5^{-n} a_n = \frac{1}{3{\cdot}5^n}\left(4{\cdot}5^n + 2{\cdot}(-1)^n\right) = \frac{1}{3}\left(4 + 2\left(\frac{-1}{5}\right)^n\right) \longrightarrow \frac{4}{3} \quad \text{då} \quad n \to \infty$$

6. Värdetabellen ger följande överbestämda och olösbara ekvationssystem:

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = B.$$

Multiplikation med A^t från vänster ger normalekvationerna

$$A^tAX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & -8 \\ 6 & -8 & 18 \end{pmatrix} X = A^tB = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 6 & 0 \\ -2 & 6 & -8 & 0 \\ 6 & -8 & 18 & -20 \end{array}\right) \underset{r_3 - 3r_1}{\overset{\frac{1}{2}r_1 \atop r_2 + r_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 10 & -6 & -20 \end{array}\right) \overset{r_3 - 2r_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -20 \end{array}\right)$$

vilket ger $a_2 = a_1 = -5$ och $a_0 = 5$ så att $p(x) = 5\left(1 - x - x^2\right)$.

7. (a) Då $F \neq$ 0-avbildningen har $V(F)$ positiv dimension. Tag ett element $\mathbf{v} \in V(F)$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Då finns $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ så att $F(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$.

$$F(\mathbf{v}) = F(F(\mathbf{u})) = F^2(\mathbf{u}) = \left[F^2 = F\right] = F(\mathbf{u}) = \mathbf{v},$$

d v s varje nollskild vektor i $V(F)$ är en egenvektor med egenvärde 1.

(b) $N(F) =$ egenrummet till 0 och enligt ovan är $V(F) =$ egenrummet till 1. Eftersom en vektor inte kan ha två olika egenvärden så följer det att $N(F) \cap V(F) = \{\mathbf{0}\}$.

(c) Antag att $\dim V(F)=k$, $1 \leq k \leq n-1$ där $n = \dim \mathbb{V}$. Förutsättningarna ger att $k \neq 0$ och $k \neq n$ ty vore $k = n$ så skulle F vara identitetsavbildningen och vore $k = 0$ så skulle F vara nollavbildningen. Dimensionssatsen ger nu att $\dim N(F) = n - k$ och varje nollskild vektor i $N(F)$ är en egenvektor med egenvärde 0 till F. Då $N(F) \cap V(F) = \{\mathbf{0}\}$ fås, om vi slår ihop baser för $N(F)$ respektive $V(F)$, en linjärt oberoende mängd (använd samma resonemang som i lösningen av uppgift 1) i $\mathbb{V}$ med n st vektorer, d v s "rätt antal". Följaktligen finns det en bas av egenvektorer, d v s F är diagonaliserbar och egenvärdena är 0 och 1.