LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Ulf Janfalk & Thomas Karlsson

Tentamen i TATA24 Linjär algebra 2008–08–15, 14–19.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.
Resultatet meddelas vi e-post. För godkänt räcker 8 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ht2007 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas). Markera detta genom att skriva "G" i rutan för uppgift 1.
Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar läggs ut under måndagen 18/8 på

http://www.mai.liu.se/~thkar/kurser/TATA24/

(3 p) 1. Lös matrisekvationen $A^{-1}XB + 2A^{-1}X = C$ där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3 p) 2. Låt $\underline{e}$ vara en ON-bas i ett fyrdimensionellt euklidiskt rum $\mathbb{E}$. Sätt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Bestäm X så att $\underline{e}(AX - B)$ får minimal längd samt ange denna längd.

(3 p) 3. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ ges i standardbasen $\underline{e}$ av matrisen

$$A_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bestäm en ON-bas $\underline{f}$ av egenvektorer till F, ange matrisen till F i basen $\underline{f}$ och tolka F geometriskt.

(3 p) 4. Lös differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - x_3 \\ x_2' = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_3' = -x_1 + x_3 \end{cases}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 1, \quad x_3(0) = -1.$$

VÄND!

(3 p) 5. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ ges i standardbaserna i dessa rum av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 10 & 9 & -1 & 6 \\ 1 & -7 & -5 & -1 & -2 \\ -1 & 11 & 11 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

Bestäm baser i noll- och värderum till F och avgör om $(3, 8, -3, 11)$ tillhör värderummet.

(3 p) 6. Låt a, b, c, d vara fyra *olika* reella tal. Visa att polynomen

$$(x-a)(x-b)(x-c), \quad (x-a)(x-b)(x-d), \quad (x-a)(x-c)(x-d), \quad (x-b)(x-c)(x-d)$$

är en bas i $\mathbb{P}_3$ = rummet av polynom av grad 3 och lägre.

Lösningsförslag till TATA24, Linjär algebra, 2008–08–15

1. Multiplikation med A från vänster ger

$$AA^{-1}XB + A(2A^{-1})X = XB + 2X = X(B+2E) = AC \iff$$
$$\iff X = AC(B+2E)^{-1}$$
$$B+2E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \iff (B+2E)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow X = A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -6 & 17 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}$$

2. Minimal längd fås om X väljs så att $\underline{\underline{e}}AX$ blir ortogonalprojektionen av $\underline{\underline{e}}B$ på A:s kolonnrum. Följaktligen kan X bestämmas genom att lösa normalekvationerna:

$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},$$
$$A^tB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$A^tAX = A^tB \iff X = \left(A^tA\right)^{-1}A^tB = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow AX = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow AX - B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow |\underline{\underline{e}}(AX-B)| = \frac{1}{3}\sqrt{1^2+1^2+(-3)^2+2^2} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

3. Bestäm egenvärden och egenvektorer på vanligt sätt:

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & 8-\lambda & -2 \\ 4 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} \overset{r_3+r_1}{=} \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & 8-\lambda & -2 \\ 9-\lambda & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} \overset{k_1-k_3}{=}$$
$$= (9-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 4 \\ 4 & 8-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left[\text{utv efter rad 3}\right] =$$
$$= (9-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)\left((1-\lambda)(8-\lambda)-8\right) =$$
$$= (9-\lambda)\left(\lambda^2-9\lambda\right) = 0 \iff \lambda = 9 \text{ (dubbel)},\ 0$$

$$\lambda=0:\left(\begin{array}{ccc|c}5&2&4&0\\2&8&-2&0\\4&-2&5&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}5&2&4&0\\10&40&-10&0\\20&-10&25&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}5&2&4&0\\0&36&-18&0\\0&-18&9&0\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}5&2&4&0\\0&2&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\iff X_0=t\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$$

och vi väljer $\mathbf{f}_1=\frac{1}{3}(-2,1,2)$. Då F är symmetrisk så är egenrummen ortogonala och deras dimension är lika med egenvärdets multiplicitet. Därmed är egenrummet till 9 planet genom origo med $\mathbf{f}_1$ som normal, d v s $\mathbb{E}_{F,9}=\{\underline{\mathbf{e}}X\in\mathbb{E}:\ -2x_1+x_2+2x_3=0\}$. Välj en vektor i detta plan, t ex $(1,-2,2)$, normera och sätt $\mathbf{f}_2=\frac{1}{3}(1,-2,2)$. Sätt slutligen $\mathbf{f}_3=\mathbf{f}_1\times\mathbf{f}_2=\frac{1}{3}(2,2,1)$. I denna ON-bas av egenvektorer får F matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{f}}}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

d v s F är en sammansättning av en ortogonalprojektion på planet $-2x_1+x_2+2x_3=0$ och en sträckning med en faktor 9.

4. Skriv systemet på matrisform och bestäm egenvärden och egenvektorer på vanligt sätt.

$$X'=\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=AX,$$

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&-1\\1&2-\lambda&1\\-1&0&1-\lambda\end{vmatrix}=\Big[\text{utv. efter kolonn 2}\Big]=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&-1\\-1&1-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(2-\lambda)\left((1-\lambda)^2-1\right)=-\lambda(2-\lambda)^2=0\iff\lambda=2\text{ (dubbel)},\ 0$$

$$\underline{\underline{\lambda=2}}:\left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&-1&0\\1&0&1&0\\-1&0&-1&0\end{array}\right)\overset{\substack{r_2+r_1\\r_3-r_1}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\Longrightarrow X_2=s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\lambda=0}}:\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\1&2&1&0\\-1&0&1&0\end{array}\right)\overset{\substack{r_2-r_1\\r_3+r_1}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&2&2&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\Longrightarrow X_0=t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Välj $\mathbf{f}_1=(0,1,0)$, $\mathbf{f}_2=(-1,0,1)$, $\mathbf{f}_3=(1,-1,1)$. Då följer att

$$X(t)=C_1e^{2t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+C_2e^{2t}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+C_3\underbrace{e^{0t}}_{1}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X(0)=C_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}0&-1&1&1\\1&0&-1&1\\0&1&1&-1\end{array}\right)\underset{\sim}{\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{r_2+r_3}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&1\\0&-1&1&1\\0&0&2&0\end{array}\right)\Longrightarrow\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X(t)=e^{2t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}-e^{2t}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

5. $V(F)$=[höljet av A:s kolonner] så beroendeekvationen för kolonnerna blir $AX=0$, d v s den ekvation vi löser för att bestämma $N(F)$. $(3,8,-3,11)$ tillhör värderummet om den är en linjärkombination av kolonnvektorerna. Därför sätter vi upp ekvationssystemet med både $\mathbf{0}$ och $(3,8,-3,11)$ i högerledet.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c|c}-1&3&3&-1&2&0&3\\-2&10&9&-1&6&0&8\\1&-7&-5&-1&-2&0&-3\\-1&11&11&-1&10&0&11\end{array}\right)\underset{\sim}{\overset{r_2-2r_1}{\overset{r_3+r_1}{r_4-r_1}}}\left(\begin{array}{ccccc|c|c}-1&3&3&-1&2&0&3\\0&4&3&1&2&0&2\\0&-4&-2&-2&0&0&0\\0&8&8&0&8&0&8\end{array}\right)\underset{\sim}{\overset{r_3+r_2}{r_4-2r_2}}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c|c}-1&3&3&-1&2&0&3\\0&4&3&1&2&0&2\\0&0&1&-1&2&0&2\\0&0&2&-2&4&0&4\end{array}\right)\underset{\sim}{r_4-2r_3}\left(\begin{array}{ccccc|c|c}-1&3&2&0&0&0&1\\0&4&3&1&2&0&2\\0&0&1&-1&2&0&2\\0&0&0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

Ur ovanstående följer att

$$N(F)\colon\ \underline{\mathbf{e}}_5\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}_5\begin{pmatrix}-3s+3t+2s-4t=-s-t\\ \frac{1}{4}(6t-3s-s-2t)=-s+t\\ s-2t\\ s\\ t\end{pmatrix}=s\underline{\mathbf{e}}_5\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+t\underline{\mathbf{e}}_5\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\\0\\1\end{pmatrix},$$

att kolonnvektorerna 4 och 5 kan utses till löjliga element så att

$$(-1,-2,1,-1),\ (3,10,-7,11),\ (3,9,-5,11)$$

är en bas i $V(F)$ och att $(3,8,-3,11)\in V(F)$ eftersom ekvationssystemet med denna vektor i högerledet, är lösbart.

6. Eftersom $\dim \mathbb{P}_3 = 4$ så räcker det enligt satsen om rätt antal element, **Sats 4.4.18**, sid 105 i boken, att visa att de fyra givna polynomen är linjärt oberoende. Ställ upp beroendeekvationen:

$$\begin{aligned}\lambda_1(x-a)(x-b)(x-c) + \lambda_2(x-a)(x-b)(x-d)+ \\ + \lambda_3(x-a)(x-c)(x-d) + \lambda_4(x-b)(x-c)(x-d) = \mathbf{0}\end{aligned} \qquad (1)$$

där $\mathbf{0}$ betyder nollvektorn i $\mathbb{P}_3$, d v s noll-polynomet. Detta innebär att (1) skall vara uppfylld oberoende av x. Speciellt skall (1) vara uppfylld för $x = a, b, c$ resp d. Insättning av $x = a$ i (1) ger

$$\begin{aligned}\lambda_1(a-a)(a-b)(a-c) + \lambda_2(a-a)(a-b)(a-d)+ \\ + \lambda_3(a-a)(a-c)(a-d) + \lambda_4(a-b)(a-c)(a-d) = \\ = \lambda_4(a-b)(a-c)(a-d) = 0 \iff \lambda_4 = 0\end{aligned}$$

eftersom a, b, c, d är *olika* reella tal. På samma sätt ger insättning av $x = b$ att $\lambda_3 = 0$, av $x = c$ att $\lambda_2 = 0$ och av $x = d$ att $\lambda_1 = 0$, d v s de fyra givna polynomen är linjärt oberoende element i $\mathbb{P}_3$, rätt antal och därmed en bas i $\mathbb{P}_3$.