LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Ulf Janfalk & Thomas Karlsson

Tentamen i TATA24 Linjär algebra 2008–03–25, 8–13.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.
Resultatet meddelas vi e-post. För godkänt räcker 8 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ht2008 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas). Markera detta genom att skriva "G" i rutan för uppgift 1.
Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar finns efter skrivtidens slut att hämta på

http://www.mai.liu.se/~thkar/kurser/TATA24/

(2 p) 1. (a) Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lös matrisekvationen $AXB^{-1} = A + B^t$.

(1 p) (b) Låt N vara ett positivt heltal, E enhetsmatrisen och A en $n \times n$-matris sådan att $A - E$ är inverterbar. Visa att

$$(A-E)^{-1}\left(A^{N+1} - E\right) = A^N + A^{N-1} + A^{N-2} + \ldots + A^2 + A + E.$$

(2 p) 2. (a) Bestäm egenvärden, en bas av egenvektorer samt avbildningsmatris i standardbasen för $\mathbb{E}^2$ till den linjära avbildning $F\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ som avbildar $\mathbf{u} \in \mathbb{E}^2$ på dess spegelbild i linjen $3x - 2y = 0$.

(1 p) (b) Rita i en figur, noggrant och skalenligt in linjen $3x - 2y = 0$, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, F(\mathbf{e}_1), F(\mathbf{e}_2)$ samt egenbasen du räknat fram i (a) (välj skala förnuftigt!).

(3 p) 3. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges i standardbasen av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}$$

där $a \in \mathbb{R}$. bestäm a så att nollrummet till F får dimension > 0. För detta värde på a, bestäm $b \in \mathbb{R}$ så att $(2, 2, b) \in V(F)$.

(3 p) 4. Betrakta

$$\mathbb{U} = [(1,2,1,2,1), (1,1,1,1,1), (0,1,0,1,0), (2,1,2,1,2)] \subset \mathbb{E}^5.$$

Låt $\mathbf{u}_0 = (3, -1, 1, 5, 2)$. Bestäm $\mathbf{u}_{\parallel_{\mathbb{U}}} \in \mathbb{U}$ och $\mathbf{u}_{\perp_{\mathbb{U}}} \perp \mathbb{U}$ sådana att $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_{\parallel_{\mathbb{U}}} + \mathbf{u}_{\perp_{\mathbb{U}}}$. Bestäm också $\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{U}} |\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}|$ samt ange för vilket $\mathbf{u}$ detta minimum antas.

VÄND!

(3 p) 5. Lös differensekvationssystemet

$$\begin{cases} a_n = 8a_{n-1} - 10b_{n-1} \\ b_n = 5a_{n-1} - \ \ 7b_{n-1} \end{cases}, \quad n \geq 1$$

med godtyckliga startvärden $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$, ej båda lika med noll. Bestäm därefter det minsta tal $c > 0$ så att $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{c^n}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ existerar samt ange gränsvärdet.

(3 p) 6. Mängden av gemensamma punkter till ytorna

$$\begin{aligned} 8x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 10x_2x_3 &= 2 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 4 \end{aligned}$$

består av två cirklar. Bestäm cirklarnas radier och medelpunkter samt ekvationerna för de plan i vilka de ligger. Svara i de ursprungliga koordinaterna.

Lösningsförslag till TATA24, Linjär algebra, 2008–03–25

1. (a) $AXB^{-1} = A + B^t \iff XB^{-1} = \underbrace{A^{-1}A}_{=E} + A^{-1}B^t \iff X = B + A^{-1}B^tB.$

   Beräkna av A^{-1} på vanligt sätt. Vi får

$$A^{-1}B^tB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -3 \\ 10 & -1 & 13 \\ -3 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$X = B + A^{-1}B^tB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 2 & -3 \\ 10 & -1 & 13 \\ -3 & -1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 11 & -1 & 14 \\ -4 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

   (b) Multiplikation från vänster med $A + E$ ger

$$\mathrm{VL} = \underbrace{(A-E)(A-E)^{-1}}_{E}\left(A^{N+1} - E\right) = A^{N+1} - E$$

$$\begin{aligned}\mathrm{HL} &= (A-E)\left(A^N + A^{N-1} + \ldots + A + E\right) = \\ &= A^{N+1} + A^N + A^{N-1} + \ldots + A^2 + A - \\ &\quad - A^N - A^{N-1} - \ldots - A^2 - A - E = A^{N+1} - E = \mathrm{VL}\end{aligned}$$

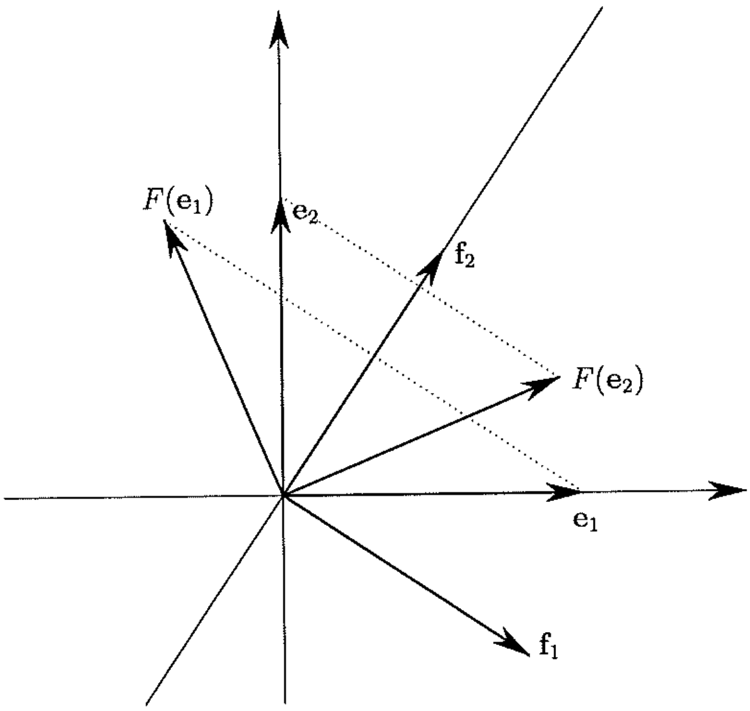
   vilket skulle bevisas.

2. (a) Linjens normal, $(3, -2)$ och linjens riktningsvektor, $(2, 3)$ är egenvektorer med egenvärde -1 respektive 1. Med egenvektorerna som bas, $\underline{\mathbf{f}}$, gäller

$$\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = TA_{\underline{\mathbf{f}}}T^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \ldots = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -5 & 12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$$

   (b)



3. $\dim N(F) > 0 \iff AX = \mathit{0}$ har nollskilda lösningar $\iff \det A = 0$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & a & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & a & 5 \end{vmatrix} \overset{r_3 - r_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & a & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & a{-}1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & 4 \\ a{-}1 & 2 \end{vmatrix} = -2a + (4a-4) =$$
$$= 2a - 4 = 0 \iff a = 2,$$

$$(2,2,b) \in V(F) \iff AX = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ b \end{pmatrix} \text{ lösbart.} \iff$$

$$\iff \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & b \end{array}\right) \overset{r_3 - r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & b{-}2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b{-}3 \end{array}\right),$$

d v s $(2,2,b) \in V(F)$ för $b = 3$.

4. Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$. Välj $\mathbf{f}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1,0)$ och ortogonalisera, t ex $(1,1,1,1,1)$. Vi får

$$\underline{e}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}_{\perp\mathbb{U}} = \underline{e}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\left(\underline{e}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\middle|\,\underline{e}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{e}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{e}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Vi ser nu att $(1,2,1,2,1) = \sqrt{3}\mathbf{f}_1 + 2\sqrt{2}\mathbf{f}_2$ och att $(2,1,2,1,2) = 2\sqrt{3}\mathbf{f}_1 - \sqrt{2}\mathbf{f}_2$, d v s dessa är löjliga element. Följaktligen är $\dim \mathbb{U} = 2$ och $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ en ON-bas i $\mathbb{U}$.

$$\mathbf{u}_{\parallel\mathbb{U}} = (\mathbf{u}_0|\mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 + (\mathbf{u}_0|\mathbf{f}_2)\,\mathbf{f}_2 =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\underline{e}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\\5\\2\end{pmatrix}\middle|\,\underline{e}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\underline{e}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\left(\underline{e}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\\5\\2\end{pmatrix}\middle|\,\underline{e}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)\underline{e}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} =$$
$$= 2\,\underline{e}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + 2\,\underline{e}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} = (2,2,2,2,2)$$

$$\mathbf{u}_{\perp\mathbb{U}} = \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{\parallel\mathbb{U}} = \underline{e}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\\5\\2\end{pmatrix} - \underline{e}\begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\\2\end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\\3\\0\end{pmatrix},$$

$$\min_{\mathbf{u}\in\mathbb{U}} |\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}| = \left|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{\|\mathbb{U}}\right| = \left|\mathbf{u}_{\perp\mathbb{U}}\right| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

5. Skriv ekvationen på matrisform

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8a_{n-1} - 10b_{n-1} \\ 5a_{n-1} - 7b_{n-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = AX_{n-1} =$$

$$= A(AX_{n-2}) = A^2X_{n-2} = \ldots = A^nX_0.$$

Beräkna egenvärden och egenvektorer till $A = A_{\underline{e}}$.

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -10 \\ 5 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(-7-\lambda) + 50 = \lambda^2 - \lambda - 6 =$$

$$= (\lambda+2)(\lambda-3) = 0 \iff \lambda = 3, -2.$$

$$\underline{\underline{\lambda = 3}}: \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -10 & 0 \\ 5 & -10 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_3 = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}_1 = \underline{e}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\lambda = -2}}: \left(\begin{array}{cc|c} 10 & -10 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{-2} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}_2 = \underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{f} = \underline{e}T = \underline{e}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A_{\underline{f}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \ A_{\underline{f}}^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix},$$

$$X_n = A_{\underline{e}}^n X_0 = TA_{\underline{f}}^n T^{-1} X_0 =$$

$$= 3^n T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} + (-2)^n T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1}\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \ldots =$$

$$= 3^n\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} + (-2)^n\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} =$$

$$= 3^n(a_0 - b_0)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-2)^n(-a_0 + 2b_0)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{c^n}X_n = \left(\frac{3}{c}\right)^n (a_0 - b_0)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{-2}{c}\right)^n (-a_0 + 2b_0)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = [c = 3] =$$

$$= (a_0 - b_0)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\left(\frac{-2}{3}\right)^n}_{\to 0}(-a_0 + 2b_0)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to (a_0 - b_0)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

då $n \to \infty$. För varje värde på $c \in]0, 3[$ gäller att $(3/c)^n \to \infty$, dvs det aktuella gränsvärdet existerar ej. Följaktligen är 3 det minsta värde på $c > 0$ för vilket gränsvärdet existerar.

6. Skriv $8x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 10x_2x_3$ på matrisform och bestäm matrisens egenvärden och

egenvektorer

$$8x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+10x_2x_3=(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix}8&0&0\\0&3&5\\0&5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=X^tAX$$

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}8-\lambda&0&0\\0&3-\lambda&5\\0&5&3-\lambda\end{vmatrix}=(8-\lambda)\left((3-\lambda)^2-25\right)=0 \iff$$

$$\iff \lambda=8,\ 3\pm5,$$

d v s egenvärdena är 8 (dubbelt) och -2. Byte till ON-bas av egenvektorer ger

$$\begin{cases}8y_1^2+8y_2^2-2y_3^2=2\\ y_1^2+\ y_2^2+\ y_3^2=4\end{cases}\iff\begin{cases}\qquad\qquad -10y_3^2=-30\\ y_1^2+y_2^2+\ y_3^2=\ 4\end{cases}\iff\begin{cases}\qquad y_3^2=3\\ y_1^2+y_2^2=1\end{cases},$$

d v s de gemensamma punkterna besår av två cirklar med radie 1 i planen $y_3=\pm\sqrt{3}$. Därmed är cirklarnas resp medelpunkt $(y_1,y_2,y_3)=(0,0,\pm\sqrt{3})$ och dessa plans normal är egenvektorn till -2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}10&0&0&0\\0&5&5&0\\0&5&5&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\Longrightarrow X_{-2}=t\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\Longrightarrow \mathbf{f}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Följaktligen är medelpunkternas ortsvektor

$$\pm\sqrt{3}\mathbf{f}_3=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}(0,1,-1)$$

och $\mathbf{f}_3$ är även planens normalvektor, d v s de har ekvation $x_2-x_3=D_\pm$. Insättning av medelpunkterna ger

$$x_2-x_3=\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}=2\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{6}=D_+$$

$$x_2-x_3=-\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}=-2\sqrt{\frac{3}{2}}=-\sqrt{6}=D_-,$$

d v s planens ekvationer blir $x_2-x_3=\pm\sqrt{6}$.