Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP62, TEN1
OPTIMERINGSLÄRA FORTSÄTTNINGSKURS för I och Ii

Datum:	9:e juni 2020
Tid:	14.00–19.00
Tentamensform:	Digitalt via WISEflow
Hjälpmedel:	Böcker, miniräknare, sökning på internet och tidigare tentamina inklusive deras lösningar.
Antal uppgifter:	6
Betygsskala:	U/3/4/5
Examinator:	Elina Rönnberg
Jourhavande lärare:	Frågor besvaras enbart via Nyhetsfeed i Lisam

Resultat meddelas per e-post och kan dröja längre än normalt.

Tentamensinstruktioner

Praktisk information om inlämning etc.

Information hittar du i "Tentamensrutin vid MAI"
under denna länk: https://old.liu.se/mai/und?l=sv

Notera att lösningarna bör skickas som EN pdf-fil.

Sortera uppgifterna i nummerordning

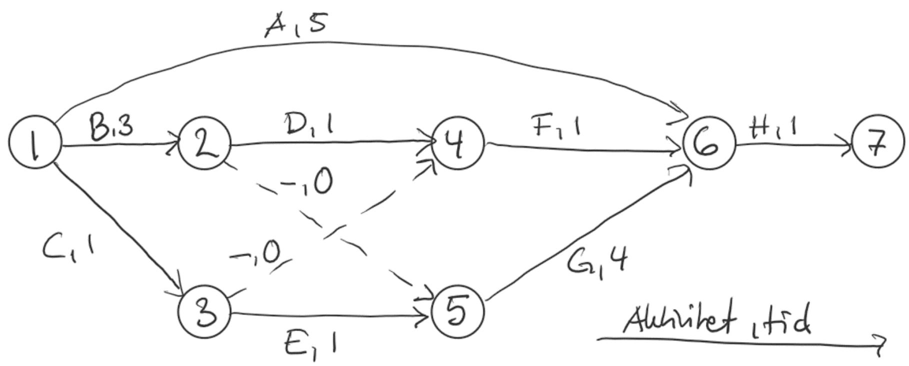
När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.
Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Notera att det, precis på samma sätt som gäller vid en salstentamen, är helt otillåtet att kommunicera med andra personer under tentamenstiden.

Uppgift 1.

Studera följande aktivitetsnätverk som är av typen där aktiviteterna ligger på bågarna. För varje båge anges vilken aktivitet den motsvarar och hur lång tid aktiviteten tar.



a. Konstruera en tabell som för varje aktivitet beskriver vilka föregångare den har och tidsåtgången för aktiviteten.

(1p)

b. Givet att en optimallösning till problemet motsvaras av den kritiska vägen 1-2-5-6-7, besvara följande frågor:

i Från att projektet startas, hur lång tid tar det innan samtliga aktiviteter har genomförts?

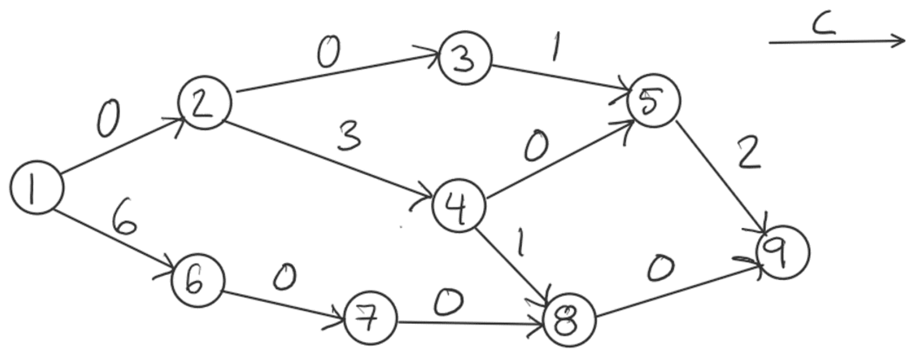
ii Antag att projektet får tillgång till ytterligare resurser som antingen kan användas i aktivitet A eller G och därigenom korta tiden för den aktiviteten med 1 tidsenhet. I vilken av aktivteterna är det mest lönsamt att använda resurserna?

Ge en kort motivering till dina respektive svar. **(1p)**

c. Utöka aktivitetsnätverket ovan med en aktivitet X som har aktiviteterna A och G som föregångare. Aktivitet X blir inte föregångare till någon av de befintliga aktiviteterna och den har en tidsåtgång på 3 tidsenheter. **(1p)**

Uppgift 2.

Studera följande nätverk där kostnaden för bågarna finns givna.



a. Beräkna den billigaste vägen från nod 1 till nod 9 med Dijkstras algoritm. Det måste framgå av din redovisning i vilken ordning noderna sökts av. **(1p)**

b. Under vissa förutsättningar kan man beräkna den billigaste vägen genom att lösa Bellmans ekvationer i nummerordning. Är det möjligt i detta fall? Om ja, gör detta och redovisa dina beräkningar. Om nej, ge en kort motivering till varför. Notera att motiveringar bedöms på ett sådant sätt att ett kortfattat och relevant svar kan ge poäng och att det är kvalitén på motiveringen som är avgörande för poängsättningen. **(1p)**

---

c. Denna deluppgift är fristående från ovanstående och bygger vidare på deluppgift **1a**. Det dyraste-väg problem som givits i deluppgift **1a** kan formuleras som ett minkostnadsflödesproblem där

- bågkostnaden är tiden för aktiviteten men med ett minustecken framför
- samtliga bågar har ett flöde med undre gräns 0 och övre gräns saknas
- nod 1 ses som en källa på en enhet och nod 7 som en sänka på en enhet

Studera det resulterande minkostnadsflödesproblemet och låt dess duallösning vara $y = (0, -3, -2, -4, -3, -7, -8)$. Avgör vilken unik primal baslösning denna duallösning svarar mot i minkostnadsflödesproblemet och avgör om den svarar mot en optimallösning till problemet eller ej. **(1p)**

Uppgift 3.

Ett lärosäte funderar på att skapa ett nytt spännande masterprogram ”Master of everything” och man arbetar med att ta fram en utbildningsplan för programmet.

Programmet är 2-årigt och varje år består av 2 terminer som i sin tur består av 2 perioder. En student som följer programmet kommer därför att läsa $p = 1, \ldots, 8$ perioder i den givna ordningsföljden. Uppgiften handlar om att välja ut vilka kurser som ska ges i de olika perioderna under programmet.

Det finns ett antal kurser som skulle kunna ingå i programmet, låt I beteckna mängden av dessa kurser. Låt v_i ange ett värde som motsvarar hur bra det vore om kurs i ingår i programmet, $i \in I$. Parametern h_i anger antalet högskolepoäng (HP) som kurs $i \in I$ ger.

Det finns en begränsning med avseende på i vilka perioder det går att ge en viss kurs. Låt parametern

$$a_{ip} = \begin{cases} 1 \text{ om kurs } i \text{ kan ges i period } p, \; p = 1, \ldots, 8, \; i \in I, \\ 0 \text{ annars.} \end{cases}$$

I denna uppgift kommer vi succesivt att bygga upp en linjär heltalsmodell som kan användas för att välja ut kurser till programmet.

De variabler som ska användas i modellen är följande:

$$x_{ip} = \begin{cases} 1 \text{ om kurs } i \text{ tas med i programmet i period } p, \; p = 1, \ldots, 8, \; i \in I, \\ 0 \text{ annars.} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1 \text{ om kurs } i \text{ tas med i programmet, } i \in I, \\ 0 \text{ annars.} \end{cases}$$

a. Formulera en linjär heltalsmodell där målfunktionen syftar till att maximera det totala värdet i programmet och där följande krav respekteras.

1. Det ska totalt ingå 120 HP i programmet.
2. En kurs tas med i programmet om och endast om den tas med i programmet i någon period.
3. En kurs kan tas med i en period endast om den kan ges i perioden.

Notera att krav 2 och 3 kan hanteras med ett gemensamt bivillkor eller med olika bivillkor var för sig. Det är valfritt vilket av sätten man använder.

(2p)

b. Utvidga din modell i deluppgift **a** med följande krav:

6. Det måste vara mellan 12 och 16 HP i varje period.
7. Det måste vara exakt 30 HP per termin.

Den resulterande modellen ska fortfarande vara en linjär heltalsmodell. **(1p)**

c. Vissa av kurserna har som förkunskapskrav att man behöver har läst andra kurser som är bland de som kan ingå i masterprogrammet. Låt mängden $F_i \subset I$ innehålla de kurser som man behöver ha läst innan kurs i påbörjas, $i \in I$.

Utvidga din modell i deluppgift **a** med följande krav:

8. Det går enbart att inkludera en kurs i programmet om förkuskapskraven är uppfyllda.

Den resulterande modellen ska fortfarande vara en linjär heltalsmodell. **(1p)**

Uppgift 4.

Studera problemet

$$
\begin{aligned}
\text{(P1)} \qquad z^* = \max\ & 3x_1 + x_2 \\
\text{då} \quad & 4x_1 + 2x_2 \leq 7 \\
& 2x_1 \leq 3 \\
& x_1,\ x_2 \geq 0,\ \text{heltal.}
\end{aligned}
$$

a. Använd Land-Doig-Dakins algoritm för att hitta en optimallösning till problem P1. Förgrena över den variabel som har högst index (alltså: x_2 i första hand) och använd djup-först sökning där du avsöker $\geq$-grenen först. Lös subproblemen grafiskt.

Problemets målfunktion har heltaliga koefficienter, vilket gör att den optimistiska skattningens värde kan avrundas till ett heltal. Utnyttja detta när du löser problemet!

Var beredd på att det kommer att bli ett förhållandevis stort träd i denna uppgift. Om man gör en tydlig figur så går delproblemen i noderna snabbt att lösa!

(2p)

b. Under trädsökningen med Land-Doig-Dakins algoritm erhålles tillåtna lösningar till LP-relaxationen av P1. För ett problem som har bivillkor av typen $\leq$ och enbart positiva bivillkorskoefficienter (i både höger- och vänsterled) kan följande heuristik användas för att, givet en lösning som är tillåten med avseende på LP-relaxationen, skapa en tillåten heltalslösning.

Beteckna den givna LP-lösningen med $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$. Under heuristikens gång kommer $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ att refereras till som "nuvarande lösning" och den kommer att uppdateras tills dess att den är heltalig.

Heuristiken utgörs av följande steg:

1. Skapa en lista L som innehåller index för de variabler $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ som har ett fraktionellt värde.
2. Om L är tom så är samtliga värden i $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ heltaliga. Avbryt.
3. Välj det första index som ingår i L, kalla det k och ta bort det ur L.
4. Tag den nuvarande lösningen $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ och avrunda värdet på x_k uppåt. Om den erhållna lösningen blir tillåten, låt den bli den nya nuvarande lösningen. Om lösningen blir otillåten, avrunda istället x_k nedåt för att skapa den nya nuvarande lösningen. Gå till steg 2.

I Steg 1 av heuristiken ska variablerna sorteras. Två möjliga sätt att göra det på är

(i) i *stigande* ordning med avseende på variablernas index

(ii) i *fallande* ordning med avseende på variablernas index

Tag den lösning du erhöll i rotnoden i deluppgift **a**. För vardera av fallen (i) och (ii): Använd heuristiken för att göra lösningen heltalig och redogör sedan för hur trädet i deluppgift **a** hade förändrats om du använt heuristiken i rotnoden (endast där!) när du genomförde trädsökningen. **(2p)**

Uppgift 5.

Betrakta följande linjära heltalsproblem

$$
\begin{aligned}
\text{(HP)} \qquad z^* \;=\; & \max\ z = 4x_1 + 5x_2 \\
\text{då} \quad & x_1 + 2x_2 \le 12 \quad (*) \\
& x_1 + x_2 \le 8 \\
& x_1 \le 6 \\
& x_2 \le 5 \\
& x_1,\ x_2 \ge 0 \quad \text{heltal.}
\end{aligned}
$$

a. Lagrangerelaxera bivillkor (*) med multiplikatorn $v \ge 0$ och teckna Lagrangefunktionen och Lagrangesubproblemet. Lös Lagrangesubproblemet för multiplikatorvärdet $v = 1/2$. Subproblemet ska lösas grafiskt.

Vilken är den starkaste optimistiska respektive pessimistiska skattning av det optimala målfunktionsvärdet som erhålls från denna subproblemlösning? **(2p)**

b. Studera LP-relaxationen till (HP). Tablåerna som bifogas nedan svarar mot de baslösningar som är optimala för något tillåtet val av v. Utnyttja tablåerna för att teckna $h(v)$. Lös det duala problemet grafiskt för att erhålla v^*. Ange samtliga subproblemlösningar som är optimala för $v = v^*$ och ange vilka av dessa som är optimala i det ursprungliga problemet. **(2p)**

Tablåer att utnyttja vid lösande av uppgift **5b**:

A:

bas	z	x_1	x_2	s_2	s_3	s_4	$\bar{b}$
z	1	$-4+v$	$-5+2v$				$12v$
s_2	0	1	1	1	0	0	8
s_3	0	1	0	0	1	0	6
s_4	0	0	1	0	0	1	5

B:

bas	z	x_1	x_2	s_2	s_3	s_4	$\bar{b}$
z	1			$5-2v$	$-1+v$		$34+2v$
x_1	0	1	0	0	1	0	6
x_2	0	0	1	1	-1	0	2
s_4	0	0	0	-1	1	1	3

C:

bas	z	x_1	x_2	s_2	s_3	s_4	$\bar{b}$
z	1		$-5+2v$		$4-v$		$24+6v$
x_1	0	1	0	0	1	0	6
s_2	0	0	1	1	-1	0	2
s_4	0	0	1	0	0	1	5

D:

bas	z	x_1	x_2	s_2	s_3	s_4	$\bar{b}$
z	1			$4-v$		$1-v$	$37-v$
x_1	0	1	0	1	0	-1	3
x_2	0	0	1	0	0	1	5
s_3	0	0	0	-1	1	1	3

Uppgift 6.

a. Nedan ges formuleringen för ett partiformningsproblem som är avsett att lösas med dynamisk programmering, bakåtrekursion.

- Steg: $t = 1,\ 2,\ 3$
- Styrvariabel: x_t = antal enheter som produceras i tidssteg t
- Tillstånd: s_t = antal enheter i lager i början av tidssteg t
- Överföringsfunktion: $s_{t+1} = s_t + x_t - d_t$
  där d_t är efterfrågan i tidssteg t
- Rekursionssamband: $f_t(s_t) = \min\limits_{x_t}\{f_{t+1}(s_{t+1}) + c_t(x_t, s_t)\}$
  där $c_t(x_t, s_t)$ är kostnadsfuktionen i tidssteg t
- Optimalvärdesfunktion:
  $f_t(s_t)$ = minimalt målfuktionsvärde i tidssteg t till 4
- Randvillkor: $f_4(s_4) = 0$, $s_1 = 1$, $s_4 = 1$
- Begränsningar: $s_t \in \{0, 1, 2, 3\}$, $x_t \in \{0, 3\}$, $t = 1, 2, 3$

Notera att styrvariabeln definierats så att det i ett tidssteg antingen kan produceras 0 eller 3 enheter. Efterfrågan är $d_t = 1$ och kostnadsfunktionen är $c_t(x_t, s_t) = 3x_t + s_t$, $t = 1, 2, 3$.

Lös det givna problemet med dynamisk programmering, bakåtrekursion. Ange en optimallösning och dess målfunktionsvärde i svaret. **(1p)**

b. Studera billigaste-väg problemet som givits i deluppgift **2a**. Avgör om det givna nätverket kan representera ett billigaste-väg problem som uppstår om man med dynamisk programmering, bakåtrekursion, vill lösa ett kappsäcksproblem med:

- binära variabler
- en linjär målfunktion som ska minimeras och har målfunktionskoefficienter som är > 0
- ett linjärt likhets-bivillkor där högerledet är 6

Om svaret är ja, teckna detta kappsäcksproblem och ge en tydlig motivering till varför detta är möjligt. Om svaret är nej, ge en tydlig motivering till varför. Notera att motiveringar bedöms på ett sådant sätt att ett kortfattat och relevant svar kan ge poäng och att det är kvalitén på motiveringen som är avgörande för poängsättningen. **(2p)**