Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP62, TEN1
OPTIMERINGSLÄRA FORTSÄTTNINGSKURS för I och Ii

Datum:	27:e mars 2020
Tid:	8.00–13.00
Tentamensform:	Digitalt via Lisam
Hjälpmedel:	Böcker, miniräknare, sökning på internet och tidigare tentamina inklusive deras lösningar.
Antal uppgifter:	6
Betygsskala:	U/3/4/5
Examinator:	Elina Rönnberg
Jourhavande lärare:	Frågor besvaras enbart via Nyhetsfeed i Lisam

Resultat meddelas per e-post och kommer dröja längre än normalt.

Tentamensinstruktioner

Praktisk information om inlämning etc.

Se meddelandet som skickats med epost och lagts upp i Lisam:
Information från mai-tenta@mai.liu.se: Tentamen, TAOP62 2020-03-27, kl 8-13.
När du är färdig med tentamen så fotograferar eller scannar du varje sida, och skickar bilderna som en bilaga – gärna som pdf – i ett mejl till adressen mai-tenta@mai.liu.se

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.
Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Notera att det, precis på samma sätt som gäller vid en salstentamen, är helt otillåtet att kommunicera med andra personer under tentamenstiden.

Uppgift 1.

En kommun vill planera för hur gödsel från djur kan används vid odling på ett effektivt sätt. Efter dialog med kommunens bönder har man identifierat att vissa områden har ett överskott (produktionen från djuren överstiger behovet vid odling vilket orsakar övergödning) samtidigt som andra områden har ett undeskott (produktionen från djuren understiger behovet vid odling och istället köps konstgödsel). Genom att koordinera användadet av gödsel hoppas man på att i kommunen som helhet kunna minska både övergödningen och kostnaden för inköp av konstgödsel.

I uppgiften kommer vi att studera ett exempel med 3 gårdar $I = \{1, 2, 3\}$ och 4 åkrar $J = \{1, 2, 3, 4\}$. I 1 ton gödsel finns r ton näring. Tillgången på *gödsel* på gård i är s_i ton, $i \in I$, och behovet av *näring* för åker j är d_j ton, $j \in J$. Antag att det totala behovet av näring tillgodoses exakt av den totala tillgången på gödsel genom att $s_1 + s_2 + s_3 = (d_1 + d_2 + d_3 + d_4)/r$.

Gödsel kan dels flyttas från en gård till en åker, dels flyttas mellan två gårdar. Parametern P_{ij} anger avståndet i km från gård i till åker j, $i \in I$, $j \in J$. Parametern Q_{ik} anger avståndet i km mellan gård i och gård k, $i \in I$, $k \in I$. Transportkostnaden är c^T kr per ton och km.

Antag att gård 1 kan transportera till åker 1 och 2, att gård 2 kan transportera till åker 2 och 3 och att gård 3 kan transportera till åker 3 och 4. För transport av gödsel mellan gårdar, antag att transport kan ske från gård 1 till gård 2, från gård 2 till gård 1, från gård 2 till gård 3 och från gård 3 till gård 2.

a. Rita ett nätverk för ett minkostnadsflödesproblem som beskriver problemet att omfördela gödsel så att kostnaden minimeras.

Tips: Tänk att flödet samt styrkan hos källor och sänkor har enheten ”ton gödsel”. **(1p)**

b. Problemet i deluppgift **a** ska utökas med följande möjlighet. Gödsel i sin naturliga form väger mycket och är opraktisk att hantera, vilket gör den dyr att flytta mellan gårdar och åkrar. Förflyttningen kan förenklas genom att gödslet avvattnas och omvandlas till mull eller granulat, som båda är enklare att hantera. Antag att man med avvattning kan omvandla 1 ton naturlig gödsel till antingen 0.2 ton mull eller 0.05 ton granulat och att ingen näring försvinner i denna process.

Antag att gård 1 har utrustning för att omvandla gödsel till mull till kostnaden c^M kr per ton gödsel och att gård 2 har utrustning för att omvandla gödsel till granualt till kostnaden c^G kr per ton gödsel. Granulat och mull kan transporteras till samma åkrar som anges i deluppgift **a**, men inte till gårdar.

Rita ett nätverk för ett minkostnadsflödesproblem som beskriver problemet att omfördela gödsel så att kostnaden minimeras. **(1p)**

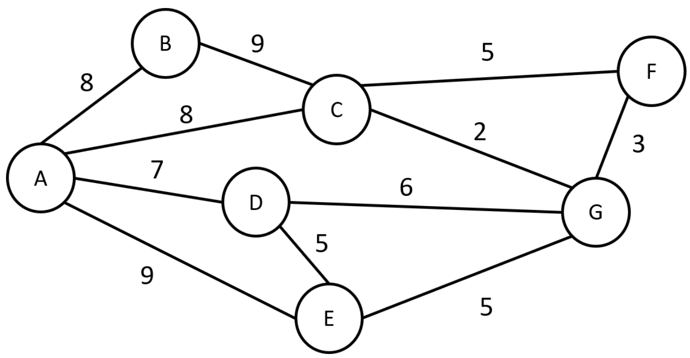
c. Från lösningen i deluppgift **b** kommer kommunen att hitta en lösning som på ett kostnadseffektivt sätt fördelar gödsel inom kommunen. I praktiken ser man dock ett potentiellt problem i att konstgödsel är så pass billigt att det för en enskild lantbrukare riskerar att löna sig att köpa konstgödsel istället för att ingå i detta utbyte och att gård 1 och 2 har möjlighet att tjäna pengar på att sälja mull och granulat.

För att analysera detta ytterligare ska modellen ovan utvidgas med möjligheten att gård 1 kan sälja mull för p^M kr per ton, att gård 2 kan sälja granulat för p^G kr per ton och att åkerområden kan köpa konstgödsel för c^K kr per ton (alla dessa priser är inklusive transport). Antag att 1 ton konstgödsel innehåller lika mycket näring som 10 ton gödsel och att det maximalt går att köpa 5 ton konstgödsel.

Utöka ditt minkostnadsflödesnätverk från deluppgift **b** till att också innehålla de nya möjligheterna. (Bågkostnader som är desamma som i deluppgift **b** behöver ej skrivas ut.) **(1p)**

Uppgift 2.

Studera följande nätverk där avståndet mellan två noder anges som en kostnad på bågen.



a. Bestäm ett billigaste uppspännande träd genom att använda Kruskals metod. **(1p)**

b. Bestäm ett billigaste uppspännande träd genom att använda Prims metod där du utgår från nod A. **(1p)**

c. Det optimalitetsvillkor för ett billigaste uppspännande träd som ligger till grund för Prims metod lyder: ”Ett träd T är ett billigaste uppspännande träd om det för varje båge $(i, j) \in \bar{T}$ gäller att $c_{ij} \geq c_{kl}$ för alla bågar (k, l) som ingår i den unika vägen (av bågar som ingår i T) mellan i och j.” Mängden $\bar{T}$ innehåller bågar som inte ingår i trädet. (Se läroboken avsnitt 8.3.)

Använd detta optimalitetvillkor för att avgöra om det uppspännande trädet $T = \{(A, D), (D, E), (E, G), (G, F), (G, C), (C, B)\}$ är optimalt eller ej. **(1p)**

Uppgift 3.

Som lärare vid ett universitet har man många olika och roliga arbetsuppgifter, bland annat föreläsningar och forskning samt handledning av doktorander och examensarbeten. Ibland kan det vara svårt att hinna med allt och en optimeringslärare bestämmer sig därför för att använda optimering som hjälp.

Läraren sammanställer först en Att-göra-lista som dels ger en poäng som speglar hur viktigt det är att uppgiften blir gjord, dels ger en skattad tidsåtgång:

Aktivitet nr	Aktivitet	Poäng	Tidsåtgång
1	Konstruktion av en tentauppgift	c_1	5 timmar
2	Skriva ett avsnitt i en artikel	c_2	15 timmar
3	Skriva ett avsnitt på en forskningsansökan	c_3	20 timmar
4	Utförande av en administrativ uppgift	c_4	1 timme

Läraren har 2 avsnitt kvar att skriva på en artikel och 3 avsnitt kvar på sin forskningsansökan. Läraren har 6 tentauppgifter att göra och 7 administrativa uppgifter. Läraren vill maximalt arbeta 40 timmar under en vecka. För att inte bli splittrad i sitt arbete är det viktigt att planera i ett **helt antal aktiviteter** (exempelvis: läraren vill inte lägga 2 timmar en vecka för att påbörja en tentauppgift utan de tentauppgifter som görs under en vecka ska bli helt klara).

a. Formulera en linjär heltalsmodell som beskriver problemet att maximera den totala poängen under en vecka givet att läraren inte ska arbeta mer än 40 timmar. **(1p)**

b. Utvidga din modell i deluppgift **a** till att inkludera följande möjlighet:
Om läraren gör 4 eller fler av de administrativa uppgifterna samma vecka så har hon en tidsbesparing på 1 timme tack vare de synergieffekter som uppstår.

Den resulterande modellen ska fortfarande vara en linjär heltalsmodell. **(1p)**

c. Utvidga din modell i deluppgift **b** till att planera arbetet under två veckor. Observera att antalet av varje aktivitet som ska genomföras **inte** är givna per vecka ovan utan att det är det totala antalet aktiviteter som ska genomföras. Nu har vi enbart förlängt planeringshorisonten eftersom det ändå inte går att genomföra dessa inom 1, eller ens 2, veckor.

Den resulterande modellen ska fortfarande vara en linjär heltalsmodell. **(1p)**

d. Utvidga din modell i deluppgift **c** med att efter de två veckorna så har läraren bestämt att hon antingen ska vara helt klar med artikeln (de två avsnitten) eller med forskningsansökan (de tre avsnitten).

Den resulterande modellen ska fortfarande vara en linjär heltalsmodell. **(1p)**

Uppgift 4.

a. Deluppgift **a** är oberoende av övriga deluppgifter.

Antag att du har ett kappsäcksproblem med variablerna $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$ och villkoret

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 6.$$

Ange fem möjliga övertäckningar och avgör om de är minimala eller ej. **(1p)**

b. I deluppgift **b-d**, studera det linjära heltalsproblemet

$$
\begin{aligned}
(HP) \qquad z^* = \max\ & x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.}\quad & 2x_1 + 2x_2 \leq 7 \\
& -2x_1 + 2x_2 \leq 1 \\
& x_1,\ x_2 \geq 0,\ \text{heltal.}
\end{aligned}
$$

Rita en (stor!) figur som illusterar:

- det tillåtna området till problemets LP-relaxation
- vilka heltalslösningar som är tillåtna i problemet
- det konvexa höljet till de tillåtna heltalspunkterna **(1p)**

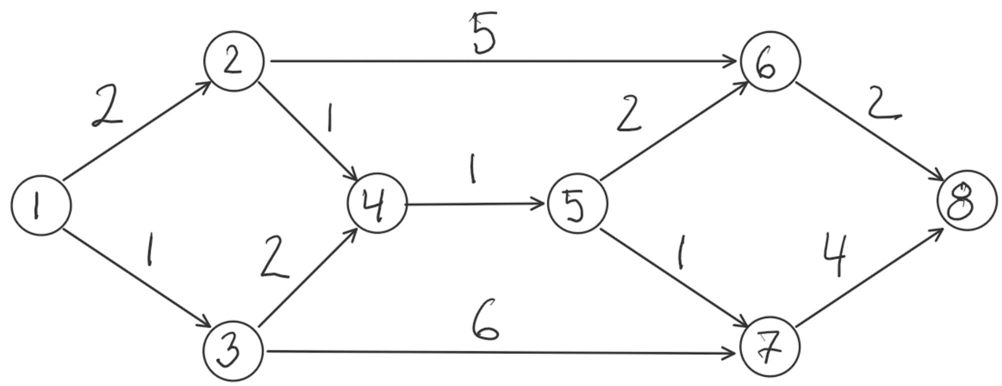
c. Antag att du vill lägga till bivillkoret $x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq 2$ till modellen (HP) som givits ovan och att du vill lösa problemet med Gomorys metod. Vad behöver du göra innan du kan börja lösa problemet? Ge en kortfattad motviering av ditt svar, kvalitén på motvieringen är avgörande för poängsättningen! **(1p)**

d. Studera LP-relaxationen till modellen (HP) som givits ovan och lägg till kravet att $x_1 \leq 1$ eller $x_1 \geq 2$. Formulera den resulterande modellen och avgör med ett matematiskt (ej grafiskt) resonemang om dess tillåtna område är konvext eller ej.

(1p)

Uppgift 5.

Studera följande nätverk där kostnaden för bågarna finns givna.



Denna uppgift handlar om problemet att finna den billigaste vägen från nod 1 till 8 i nätverket under sidovillkoret som ges nedan.

Låt mängden B innehålla alla bågar som ges i nätverket och introducera variabeln

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{om båge}(i,j) \text{ ingår i den billigaste vägen, } (i,j) \in B \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Låt mängden X innehålla de lösningar som utgör vägar från nod 1 till nod 8 i nätverket. I uppgiften är det tillåtet (och rekommenderat) att, istället för att skriva ut de bivillkor som x behöver uppfylla för att vara en billigaste väg, använda beteckningen $x \in X$ för att uttrycka detta.

Sidovillkoret den billigaste vägen måste uppfylla är $2x_{26} + 3x_{37} \geq 1$.

a. Lagrangerelaxera sidovillkoret med multiplikatorn $v \geq 0$, teckna Lagrangefunktionen och rita det resulterande nätverket. Lös Lagrangesubproblemet för multiplikatorvärdet $v = 1$. Subproblemlösningen erhålles genom att lösa Bellmans ekvationer i nummerordning.

Vilken är den starkaste optimistiska respektive pessimistiska skattning av det optimala målfunktionsvärdet som erhålls från denna subproblemlösning? **(2p)**

b. Teckna den Lagrangeduala funktionen explicit, rita den Lagrangeduala funktionen och lös det Lagrangeduala problemet grafiskt. **(2p)**

Uppgift 6.

a. Studera följande kappsäcksproblem.

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{då} \quad & 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 5 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Lös det givna kappsäcksproblemet med dynamisk programmering, bakåtrekursion. Innan du börjar lösa problemet, redovisa steg, styrvariabler, tillstånd, överföringsfunktion, optimalvärdesfunktion, rekursionssamband, randvillkor och variabelbegränsningar. Ange optimallösningen och dess målfunktionsvärde i svaret.

(2p)

b. Antag att du ska lösa ett kappsäcksproblem med binära variabler där målfunktionen ska maximeras och vi har ett $\leq$-villkor. I den formulering vi brukar använda så antar vi att koefficienterna i bivillkoret är positiva.

Besvara följande två frågor

- Var kan ett problem uppstå i den typ av formulering vi brukar använda om vi försöker lösa ett problem som har negativa bivillkorskoefficienter?
- Går det alltid att omformulera problemet så att det inte finns några negativa bivillkorskoefficienter?

(1p)