Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP62, TEN1
OPTIMERINGSLÄRA FORTSÄTTNINGSKURS för I och Ii

Datum:	27:e augusti 2019
Tid:	14.00–19.00
Hjälpmedel:	Kurslitteratur av Lundgren m fl: ***Optimeringslära*** **lärobok**, nya upplagan med mjuk pärm, blå bok. Det är tillåtet med anteckningar och klisterlappar i läroboken. **Dubblesidigt A4-blad, handskrivna anteckningar**.
Antal uppgifter:	6 Varje uppgift kan ge högst 3 eller 4 poäng. För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Elina Rönnberg
Jourhavande lärare:	Elina Rönnberg 013-28 16 45

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1.

I denna uppgift ska vi hjälpa ett europeiskt företag att analysera sina resor till sin nordamerikanska filial. Varje år görs 750 resor från Huvudkontoret (EH) i Europa till Filialen (NF) i Nordamerika och företaget blir allt mer medvetet om koldioxidutsläppen som detta medför. Som ett led i deras miljöarbete vill de nu analysera möjliga resealternativ med tåg och flyg. (Vi studerar bara resan från EH till NF.)

Det finns ett antal städer som det är naturligt att resa via. I Europa finns stad E1 och i Nordamerika städerna N1 och N2. Följande resealternativ har identifierats:

Flyg, utsläpp α kg per km		**Tåg**, utsläpp β kg per km	
Från → Till	Antal km	Från → Till	Antal km
EH → NF	$l_{EH\to NF}$	EH → E1	$l_{EH\to E1}$
EH → N1	$l_{EH\to N1}$	N1 → NF	$l_{N1\to NF}$
E1 → NF	$l_{E1\to NF}$	N2 → NF	$l_{N2\to NF}$
E1 → N2	$l_{E1\to N2}$		

Utsläppet från en rest sträcka ges av produkten mellan utsläppet per km och antal km som resan är; exempelvis, för flyg EH → NF blir utsläppet $\alpha l_{EH\to NF}$.

a. Rita ett nätverk för ett minkostnadsflödesproblem som beskriver problemet att välja den resväg som minimerar företagets utsläpp av koldioxid. **(1p)**

(Eftersom $\alpha >> \beta$ så behöver vi inte lösa ett optimeringsproblem för att veta att lösningen innebär att samtliga resor går den väg som innehåller minst antal km med flyg. Vi ritar ändå nätverket för att ha något att bygga vidare på.)

b. Även om företaget har ambitionen att ta stor hänsyn till utsläppen behöver de också ta hänsyn till kostnaden för resorna (biljettpris, arbetstiden det tar, ...). Beteckna reskostnaden för sträckan $i \to j$ med $c_{i\to j}$ för de sträckor som givits i tabellen ovan. Inför en kostnad k kr per kg utsläpp så att utsläppen kan räknas om till en utsläppskostnad; exempelvis, för flyg EH → NF blir utsläppskostnaden $k\alpha l_{EH\to NF}$. Den totala kostnaden för en sträcka är summan av reskostnaden och utsläppskostnaden; exempelvis, för flyg EH → NF blir totalkostnaden $c_{EH\to NF} + k\alpha l_{EH\to NF}$.

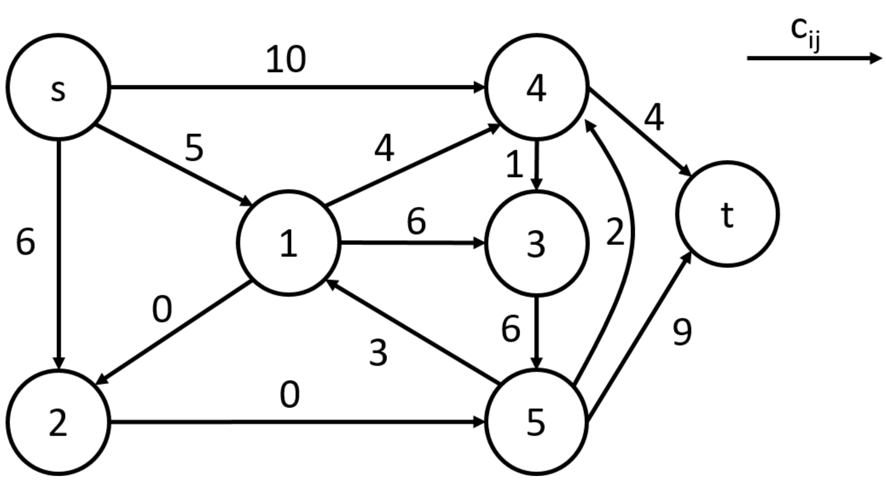
Rita ett nätverk för ett minkostnadsflödesproblem som beskriver problemet att välja den resväg som minimerar företagets totala kostnad. **(1p)**

(Här beror lösningen av värdet på k. Hur väljer man ett sådant värde?)

c. Utöka ditt nätverk i deluppgift **a** med kravet att man för att vara goda förebilder vill göra minst 200 resor med tåg i Nordamerika. **(1p)**

Uppgift 2.

Studera följande nätverk där c_{ij} anger kostnaden för att gå från nod i till j.



a. Beräkna den billigaste vägen från nod s till t med Dijkstras algoritm. Det måste framgå i din redovisning i vilken ordning noderna sökts av. **(1p)**

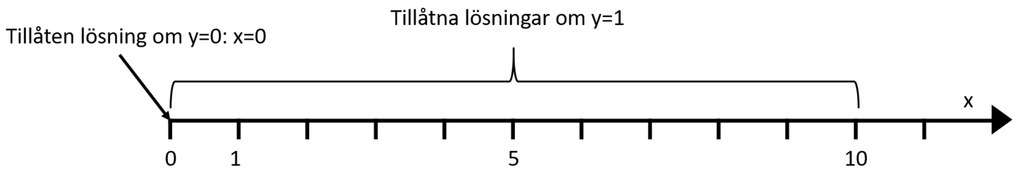
b. Antag att du har löst problemet som givits ovan och att kostnaden för båge (3,5) därefter ändras till -4. Visa med hjälp av information i det duala problemet att det primala problemet har obegränsad lösning. Var noga med att motivera! **(1p)**

c. Eftersom ett billigaste-väg problem alltid kan formuleras och lösas som ett LP-problem så kommer en lösning som erhållits med Dijkstras algoritm alltid att kunna associeras med en baslösning till det motsvarande LP-problemet. Beskriv hur man, givet att man löst problemet med Dijkstras algoritm, på ett enkelt och effektivt sätt kan identifiera vilka som är de motsvarande basvariablerna och vilka värden de har. En tydlig motivering är avgörande för poängsättningen!

Ange för den lösning du erhöll i deluppgift **a** vilken som är dess motsvarande baslösning. **(1p)**

Uppgift 3.

a. Tänk dig att du har en matematisk modell med en kontinuerlig variabel x sådan att $0 \leq x \leq 10$ och en binär variabel y samt ett krav som säger att om $y = 0$ så måste det gälla att $x = 0$. Vilka värden på x som är tillåtna kan då illustreras med figuren



Gör en blandad linjär heltalsformulering för att beskriva detta tillåtna område. Var noga med att specificera vilka värden som variablerna kan anta. **(1p)**

b. Följande bivillkor beskriver det tillåtna området för ett linjärt blandat heltalsproblem.

$2y + 7(1 - y) \leq x \leq 5y + 9(1 - y)$
$x \geq 0$
$y \in \{0, 1\}$

Illustrera med en figur vilka värden på x som är tillåtna och beskriv/illustrera i denna figur hur de tillåtna värdena på x beror på värdet på y. **(1p)**

c. Antag att du har ett optimeringsproblem som innehåller en binär variabel z och en heltalig variabel $x = (x_1, x_2)$ som motsvarar punkter i $(x_1, x_2)-$rummet. Problemets tillåtna område är följande: Om $z = 1$ så ska x anta något av värdena (1,2), (2,3), (4,1) eller (4,7). Om $z = 0$ ska x anta något av värdena (7,3), (8,5) eller (9,2).

Gör en linjär heltalsformulering för att beskriva detta tillåtna område.

För (i), (ii) och (iii) nedan, rita en figur som illustrerar det tillåtna området i $(x_1, x_2)-$rummet. När det är relevant, inkludera en kommentar om (eller illustration av) hur värdet på z påverkar vilka av lösningar i $(x_1, x_2)-$rummet som är tillåtna. Vid LP-relaxationer nedan, behåll övre gränsen på binärvariablerna.

(i) Det tillåtna området för det givna linjära heltalsproblemet

(ii) Det tillåtna område som erhålls om samtliga heltaliga variabler utom z LP-relaxeras

(iii) Det tillåtna område som erhålls om samtliga heltaliga variabler LP-relaxeras **(2p)**

Uppgift 4.

Studera det linjära heltalsproblemet

$$\begin{aligned} z^* = \min\ & 6x_1 + 8x_2 \\ \text{s.t.}\quad & 3x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ & x_1,\ x_2, \geq 0,\ \text{heltal.} \end{aligned}$$

Låt s_1 och s_2 vara slackvariabler för första respektive andra bivillkoret. Notera att de är $\geq -$villkor! Optimaltablån till LP-relaxationen har utseendet

$\mathbf{x_B}$	z	x_1	x_2	s_1	s_2	$\bar{b}$
z	1	0	0	$-4/5$	$-18/5$	$88/5$
x_1	0	1	0	$-2/5$	$1/5$	$4/5$
x_2	0	0	1	$1/5$	$-3/5$	$8/5$

a. Teckna det Gomory-snitt som genereras ur x_2-raden och uttryck det i ursprungliga variablerna x_1 och x_2. Observera minustecknet framför slackvariablerna då problemet skrivs på standardform, dvs $3x_1 + x_2 - \mathbf{s_1} = 4$ respektive $x_1 + 2x_2 - \mathbf{s_2} = 4$. **(1p)**

b. Som fortsättning på deluppgift **a**, rita en (stor!) figur som illusterar det tillåtna området till problemets LP-relaxation och markera i samma figur vilka heltalslösningar som är tillåtna i problemet. Markera också var LP-optimum är och var Gomorysnittet som genererades i deluppgift **a** hamnar. **(1p)**

c. Tag det fraktionella snitt som erhölls i deluppgift **a**, uttryck detta som ett $\leq$-villkor där s_3 införs som slackvariabel och lägg till detta villkor i den optimala simplextablån ovan. Reoptimera problemet med den duala simplexmetoden. Är den erhållna lösningen optimal med avseende på det ursprungliga problemet? **(1p)**

d. Denna uppgift är oberoende av de tidigare deluppgifterna. Tänk dig situationen att du använder Gomorys metod för att lösa ett problem med enbart heltaliga variabler. Tag ställning till följande frågeställningar:

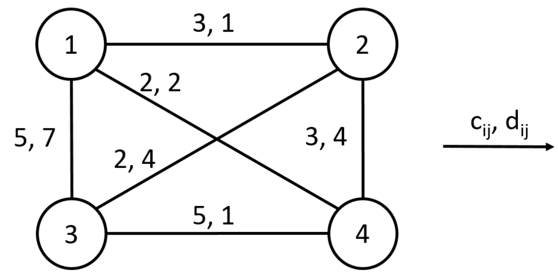
(i) Antag att alla villkor som definierar det konvexa höljet finns bland bivillkoren till ditt problem. Kommer du då att behöva generera några Gomorysnitt?

(ii) Antag att du erhåller en optimallösning till problemet utan att generera några Gomorysnitt. Kan du då dra slutsatsen att alla villkor som definierar det konvexa höljet finns bland bivillkoren till ditt problem?

Ge en kortfattad och relevant motivering till vardera fall. Kvalitén på din motivering är avgörande för poängsättningen och med kortfattat menas här ungefär totalt en halv sida text. **(1p)**

Uppgift 5.

Studera följande oriktade graf och låt mängden B innehålla alla bågar som ges i grafen.



I denna uppgift studeras problemet att finna ett billigaste uppspännande träd i grafen ovan men att vi ska göra det för två olika uppsättningar av bågkostnader betecknade $\mathbf{c_{ij}}$ **för träd 1** respektive $\mathbf{d_{ij}}$ **för träd 2**. Dessa två problem skulle gå att lösa oberoende av varandra om det inte vore för att det finns ytterligare ett krav som säger att för bågar som ansluter till nod 1 måste lösningarna måste vara sådana att träd 1 och träd 2 använder samma bågar. (Detta innebär för var och en av bågarna (1,2), (1,3) och (1,4) att antingen så används den i båda träden eller i inget av dem). Målfunktionen för problemet är att den totala kostnaden för de båda träden ska minimeras.

a. Konstruera en egen heuristik för att hitta en tillåten lösning till problemet som beskrivits ovan. Illustrera hur heuristiken fungerar genom att konstruera en tillåten lösning till det givna problemet och ange dess målfunktionsvärde.

Din heuristik behöver inte ge en bra lösning men det är mycket viktigt att du motiverar varför den ger en tillåten lösning och att du redovisar hur din fullständiga lösning ser ut! **(1p)**

b. I denna deluppgift ska vi använda Lagrangerelaxation.

Introducera följande variabler.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{om båge } (i,j) \text{ ingår i uppspännande } \textbf{träd 1}, \ (i,j) \in B \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{om båge } (i,j) \text{ ingår i uppspännande } \textbf{träd 2}, \ (i,j) \in B \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Låt mängden T innehålla de lösningar $x = (x_{ij})_{(i,j)\in B}$ respektive $y = (y_{ij})_{(i,j)\in B}$ som utgör uppspännande träd i grafen ovan. I uppgiften är det tillåtet (och rekommenderat) att, istället för att skriva ut de bivillkor som x respektive y behöver uppfyllla för att vara ett uppspännande träd, använda beteckningen $x \in T$ respektive $y \in T$ för att uttrycka detta.

En matematisk modell för problemet kan formuleras enligt följande.

$$\begin{aligned} z^* = \min \quad & \sum_{(i,j)\in B} c_{ij}x_{ij} + \sum_{(i,j)\in B} d_{ij}y_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & x_{12} - y_{12} = 0 \quad \text{Lagrangemultiplikator: } u_2 \\ & x_{13} - y_{13} = 0 \quad \text{Lagrangemultiplikator: } u_3 \\ & x_{14} - y_{14} = 0 \quad \text{Lagrangemultiplikator: } u_4 \\ & x \in T, \ y \in T \end{aligned}$$

Lagrangerelaxera de tre första bivillkoren med multiplikatorerna u_2, u_3 och u_4, teckna Lagrangefunktionen och Lagrangesubproblemet som ska delas upp i två billigaste uppspännande träd-problem. Lös Lagrangesubproblemen för multiplikatorvärdena $u_2 = u_3 = u_4 = -1$ respektive $u_2 = u_3 = u_4 = 1$. Subproblemen löses med Prim eller Kruskals algoritm, men detaljer behöver ej redovisas.

Vilken är den starkaste optimistiska respektive pessimistiska skattning av det optimala målfunktionsvärdet som erhålls från subproblemlösningarna? **(2p)**

c. För att utnyttja de lösningar man fått fram via Lagrangerelaxation så kan det vara bra att använda en heuristik för att reparera lösningar som är otillåtna och göra dem tillåtna. Nedanstående ger en heuristik för att reparera lösningar av den typ som erhållits i deluppgift **b**.

Använd heuristiken för att laga lösningen där träd 1 ges av bågarna (1,3), (1,4), (2,4) och där träd 2 ges av bågarna (1,2), (2,3), (3,4). Redovisa alla steg tydligt!

Beskrivning av heuristik

Skapa en lista BÅGAR= $[(1,2),(1,3),(1,4)]$ och sätt $\Delta_* = \Delta_{**} = \infty$.

1. Om listan BÅGAR är tom, avbryt. Annars, låt (i,j) beteckna den första bågen i listan BÅGAR och ta sedan bort (i,j) från listan
2. Om $x_{ij} = y_{ij}$ gå till 1
3. Om $x_{ij} = 1$ och $y_{ij} = 0$ gå till 4, annars gå till 7
4. Sätt $x_{ij} = 0$ och testa att reparera träd 1 enligt (*) nedan
5. Om maximalt 1 båge ansluter till nod 1 i träd 2:
   Sätt $y_{ij} = 1$ och testa att reparera träd 2 enligt (**) nedan
6. Om $\Delta_* \leq \Delta_{**}$, sätt $x_{ij} = y_{ij} = 0$ annars, sätt $x_{ij} = y_{ij} = 1$
7. Om $x_{ij} = 0$ och $y_{ij} = 1$ gå till 8, annars gå till 11
8. Sätt $y_{ij} = 0$ och testa att reparera träd 2 enligt (*) nedan
9. Om maximalt 1 båge ansluter till nod 1 i träd 1:
   Sätt $x_{ij} = 1$ och testa att reparera träd 1 enligt (**) nedan
10. Om $\Delta_* \leq \Delta_{**}$, sätt $x_{ij} = y_{ij} = 0$ annars, sätt $x_{ij} = y_{ij} = 1$
11. Sätt $\Delta_* = \Delta_{**} = \infty$ och gå till 1

(*) Laga trädet genom att lägga till den båge (k,l) som på billigaste sätt sammanbinder de delträd som bildades när (i,j) togs bort. Bågar som ansluter till nod 1 får enbart väljas om de fortfarande finns i listan BÅGAR, annars inte. Låt Δ_* = ”kostnad båge (k,l)” - ”kostnad båge (i,j)”.

(**) Laga trädet genom att ta bort den dyraste båge (k,l) som bryter den cykel som bildades när (i,j) las till. Bågar som ansluter till nod 1 får enbart väljas om de fortfarande finns i listan BÅGAR, annars inte. Låt Δ_{**} = ”kostnad båge (i,j)” - ”kostnad båge (k,l)”.

(1p)

Uppgift 6.

a. Nedan ges formuleringen för ett partiformingsproblem som är avsett att lösas med dynamisk programmering, bakåtrekursion. Något som saknas i formuleringen är kostnadsfunktionen, $c_t(x_t, s_t)$. Komplettera formuleringen genom att teckna kostnadsfunktionen för följande beskrivning av kostnaden.

Kostnaden per producerad enhet är c_t^{P} kr i tidsperiod t, $t = 1, 2, 3$. Kostnaden för lagret är oberoende av tidssteget men innehåller både en rörlig och en fast del. Den rörliga delen baseras på hur mycket som finns i det inkommande lagret i tidssteget och kostnaden per enhet är c^{L} kr. Den fasta delen är $c^{\text{L-fix}}$ kr och uppstår om det finns minst en enhet i det inkommande lagret i det aktuella tidssteget. (Den fasta delen av kostnaden kan motiveras av att man behöver ha viss utrustning igång i lagret, exempelvis för att reglera temperatur.)

- Steg: $t = 1,\ 2,\ 3$
- Styrvariabel: x_t = antal enheter som produceras i tidssteg t
- Tillstånd: s_t = antal enheter i lager i början av tidssteg t
- Överföringsfunktion: $s_{t+1} = s_t + x_t - d_t$
  där d_t är efterfrågan i tidssteg t
- Rekursionssamband: $f_t(s_t) = \min\limits_{x_t}\{f_{t+1}(s_{t+1}) + c_t(x_t, s_t)\}$
- Optimalvärdesfunktion:
  $f_t(s_t)$ = minimalt målfuktionsvärde i tidssteg t till 4
- Randvillkor: $f_4(s_4) = 0$, $s_1 = 0$, $s_4 = 0$
- Begränsningar: $0 \leq s_t \leq 5$, $0 \leq x_t \leq 6$, $t = 1, 2, 3$

Problemet ska ej lösas!

(1p)

b. Tänk dig att du ska planera en resa på 4 dagar. Varje båge i nätverket nedan motsvarar en sträcka du kan åka under en dag, och varje nod en plats där du kan övernatta. Varje nod har markerats med sitt nodnummer och en vikt som motsvarar värdet i att övernatta på denna plats. Resan ska starta i nod 0 och sluta i nod 6. Du måste välja en sträcka att åka varje dag, och bågen som går från nod 6 till nod 6 indikerar att i denna nod är det möjligt att övernatta flera nätter, men det gäller enbart för denna. Du vill hitta den resa som maximerar summan av övernattningsvikterna.

Lös det givna problemet med dynamisk programmering, bakåtrekursion. Innan du börjar lösa problemet, redovisa steg, styrvariabler, tillstånd, överföringsfunktion, optimalvärdesfunktion, rekursionssamband, randvillkor och variabelbegränsningar. Ange en optimal resplan och dess vikt i svaret.

(2p)