Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP62, TEN1
OPTIMERINGSLÄRA FORTSÄTTNINGSKURS för I och Ii

Datum:	11:e juni 2019
Tid:	14.00–19.00
Hjälpmedel:	Kurslitteratur av Lundgren m fl: ***Optimeringslära*** **lärobok**, nya upplagan med mjuk pärm, blå bok. Det är tillåtet med anteckningar och klisterlappar i läroboken. **Dubblesidigt A4-blad, handskrivna anteckningar**.
Antal uppgifter:	6 Varje uppgift kan ge högst 3 eller 4 poäng. För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Elina Rönnberg
Jourhavande lärare:	Elina Rönnberg 013-28 16 45

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1.

Ett företag ska tillverka och sälja exakt 200 enheter av en produkt och behöver hjälp att bestämma i vilken av sina fabriker, 1, 2 eller 3, produkten ska tillverkas och hos vilken av sina återförsäljare, A eller B, som produkten ska säljas.

Kostnaden för tillverkning är c_1, c_2 och c_3 i fabrik 1, 2 respektive 3, och intäkten för försäljning är f_A och f_B hos återförsäljare A respektive B. Återförsäljare A kan ta emot produkter från fabrik 1 och 2 och kan sälja mellan 50 och 150 enheter. Återförsäljare B kan ta emot produkter från fabrik 2 och 3 och kan sälja mellan 50 och 150 enheter. Varje fabrik kan tillverka mellan 0 och 100 enheter.

a. Rita ett nätverk för ett minkostnadsflödesproblem som beskriver problemet att planera hur många enheter som ska tillverkas vid respektive fabrik och hur många enheter som ska säljas hos respektive återförsäljare för att vinsten ska bli så stor som möjligt. **(1p)**

b. Antag att kostnaden för tillverkningen i fabrik 1 beror på hur många enheter som tillverkas och studera följande två fall:

Kostnad per enhet för enhet nummer	1 till 30	31 till 60	61 till 100
Fall 1	c_1	$1{,}1c_1$	$1{,}2c_1$
Fall 2	c_1	$0{,}9c_1$	$0{,}8c_1$

Tabellen ska tolkas så att: I båda fallen kostar de första 30 enheterna c_1 per styck. I fall 1 är varje ytterligare enhet, upp till ett totalt antal på 60 enheter, 10% dyrare. De sista 40 enheterna är 20% dyrare än de första 30 enheterna. I fall 2 är varje enhet utöver de 30 första istället 10% billigare, upp till 60 enheter. De sista 40 enheterna 20% billigare än de första 30 enheterna.

Ett av fallen går att modellera i ett minkostnadsfödesnätverk, det andra inte.

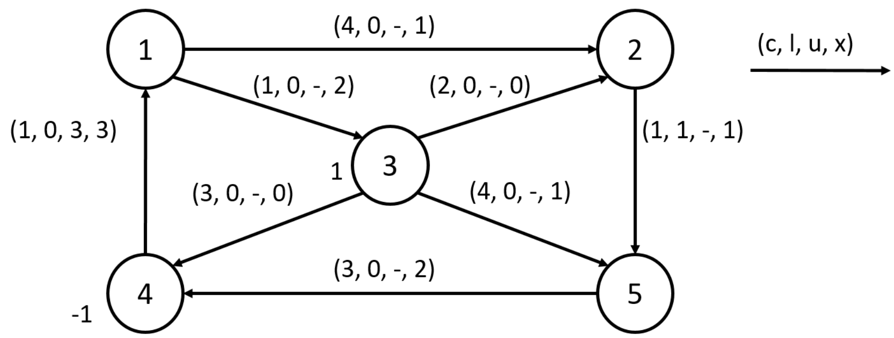
Ange vilket av fallen du kan modellera i ett minkostnadsflödesnätverk och utvidga ditt nätverk från deluppgift **a** med detta. (Det är tillåtet att ha mer än en båge mellan två noder om man vill.)

Ange vilket av fallen du inte kan modellera i ett minkostnadsflödesnätverk och ge en **kortfattad och relevant** motivering till varför. Kvalitén på din motivering är avgörande för poängsättningen och med kortfattat menas här ungefär en halv sida text. (En fortsättning på detta följer i **Uppgift 3**.)

(2p)

Uppgift 2.

Studera följande nätverk där nod 4 är en källa på en enhet, nod 3 är en sänka på en enhet och övriga noder är mellannoder. För vaje båge finns dess kostnad c, flödets under gräns l, flödets övre gräns u och ett startflöde x givet.



a. Givet flödet i figuren ovan, ange vilka av bågarna som är basbågar samt den reducerade kostnaden för icke-basbågarna. **(1p)**

b. Givet informationen i figuren och dina beräkningar i deluppgift **a**, genomför en iteration med primala simplexmetoden för nätverksproblem. Ange tydlig i ditt svar vad det nya flödet blir och vad kostnaden är för detta flöde. **(1p)**

c. Teckna den duala målfunktionen. Givet flödet i figuren ovan, använd dess motsvarande baslösning och beräkna värdet på den duala målfunktionen. **(1p)**

Uppgift 3.

a. Antag att du ska schemalägga personer som arbetar i en av fabrikerna som beskrivs i Uppgift 1 och att förutsättningarna är följande. Du har I personer som ska schemaläggas och under planeringsperioden finns det A arbetspass som ska bemannas. Baserat på tidigare erfarenheter har ni genererat S olika scheman som en person kan arbeta enligt under planeringsperioden (tänk att S är betydligt större än I).

För varje person i och schema s finns det en parameter p_{is} som ger en poäng som motsvarar hur önskvärt det är att person i arbetar enligt schema s, $i = 1, \ldots, I$ och $s = 1, \ldots, S$. Det finns också en parameter k_{sa} som har värdet 1 om schema s bemannar pass a, och 0 annars, $s = 1, \ldots, S$ och $a = 1, \ldots, A$. Bemanningsbehovet på pass a är att minst l_a personer behövs, $a = 1, \ldots, A$.

Formulera en linjär heltalsmodell som beskriver problemet att välja vilket schema varje person ska arbeta enligt så att bemanningsbehovet uppfylls och så att den totala poängen för sköterskorna maximeras. **(2p)**

b. Studera **Uppgift 1a** och tänk dig att du gjort en matematisk modell som motsvarar nätverket du ritade där. En sådan modell innehåller variabler som motsvarar flödet på bågarna, undre och övre gränser på bågflödet, en målfunktion och nodbalansvillkor. I nätverket finns det en båge som hanterar kostnaden c_1 för produktionen i fabrik 1. Kalla variabeln som motsvarar flödet på denna båge för x_1 och låt den undre och övre gränsen för produktionen i fabrik 1 finnas som undre och övre gränser på denna flödesvariabel.

Studera nu fall 1 och fall 2 som ges i **Uppgift 1b**. För var och ett av dessa, beskriv hur du skulle utöka din matematiska modell för att ta hänsyn till den ändrade kostnaden för tillverkning i fabrik 1. Ett tips är att det fall som går att modellera i nätverket är enklare att hantera även i den matematiska modellen och att det andra fallet är lite mer invecklat. Det är även här tillåtet att ha mer än en båge mellan två noder i nätverket.

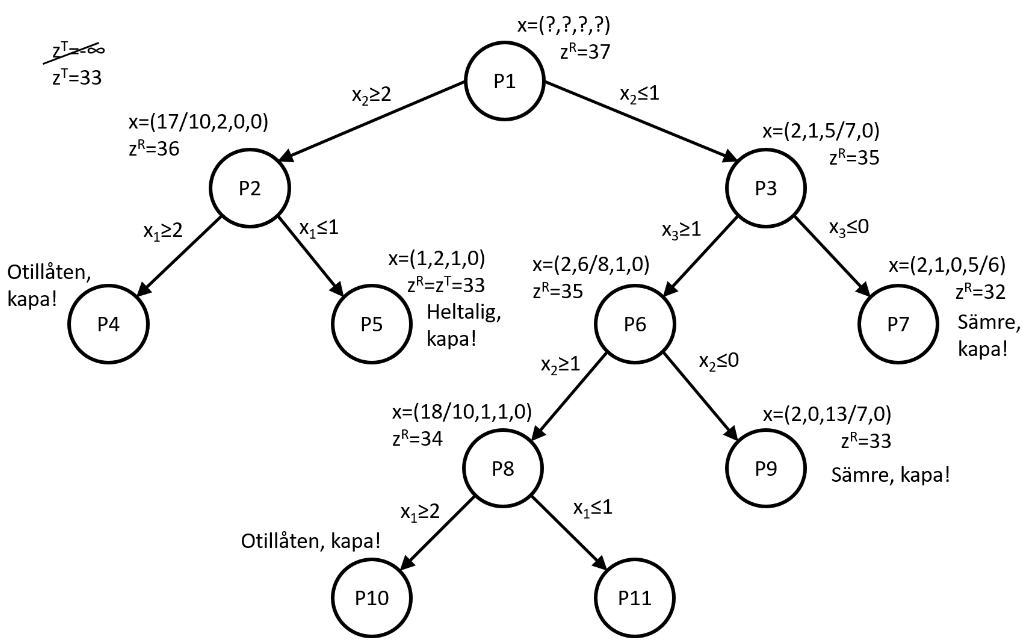
Den resulterande modellen ska vara linjär och om du behöver så är det tillåtet att inför binära eller heltaliga variabler. **(2p)**

Uppgift 4.

Studera problemet

$$
\begin{array}{llll}
\text{(HP)} & \max z = & 12x_1 + 8x_2 + 5x_3 + x_4 \\
 & \text{då} & 10x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 6x_4 \leq 33 \\
 & & 0 \leq x_1 \leq 2, \text{heltal}, \\
 & & 0 \leq x_2 \leq 2, \text{heltal}, \\
 & & 0 \leq x_3 \leq 2, \text{heltal}.
\end{array}
$$

Nedan ges information från när problemet lösts med Land-Doig-Dakins metod med djup-först-sökning och strategin att förgrena över $\geq$-grenen först. Värdet på z_R är avrundat till heltal eftersom problemets koefficienter är heltaliga. Sökningen har avbrutits precis när subproblemet i nod 11 ska lösas och som framgår i figuren så finns lösningen i nod 1 inte utskriven i trädet.



a. Vilken är lösningen till subproblemet i nod 1? **(1p)**

b. Lös subproblemet i nod 11 och fortsätt Land-Doig-Dakins metod till dess att en optimallösning erhålles. Ange problemets optimallösning. **(1p)**

c. Antag att du hade bestämt dig för att avbrottskriteriet för sökningen är när differensen mellan den optimistiska och pessimistiska skattningen är 2 enheter (eller mindre). Vilka av de givna noderna skulle ha ingått i trädet då och i vilken ordning skulle de ha avsökts? **(1p)**

d. Tänk dig ett generellt heltalsproblem. Antag att du hade genererat en giltig olikhet som du lagt till i modellen innan du började lösa problemet med Land-Doig-Dakins metod. Hade olikheten kunnat påverka något av följande:

- vilken optimallösning som erhålls
- vilka subproblemlösningar som erhålls
- sökträdets utseende

Motivera ditt svar på ett **kortfattat och relevant** sätt. Kvalitén på din beskrivning är avgörande för poängsättningen och medkortfattat menas här ungefär en halv sida text. **(1p)**

Uppgift 5.

Studera problemet

$$
\begin{array}{lrrrrrll}
\max & z = 8x_1 & +9x_2 & +7x_3 & +3x_4 & +4x_5 & & \\
\text{då} & 4x_1 & +7x_2 & +8x_3 & +5x_4 & +6x_5 & \leq 18 & (*) \\
 & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & = 3 & \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \in \{0,1\}. &
\end{array}
$$

a. Lagrangerelaxera bivillkor (*) med multiplikatorn $v \geq 0$, teckna Lagrangefunktionen och Lagrangesubproblemet. Lös Lagrangesubproblemet för multiplikatorvärdena $v = 1$ och $v = 2$. Subproblemet ska lösas med inspektion (huvudräkning).

Vilken är den starkaste optimistiska respektive pessimistiska skattning av det optimala målfunktionsvärdet som erhålls från subproblemlösningarna? **(2p)**

b. Antag att du har möjlighet att lösa Lagrangesubproblem av den typ som tagits fram i deluppgift **a** men att du inte har möjlighet att lösa det fullständiga problemet. Antag vidare att problemet ovan ska utökas med ytterligare en binär variabel x_6 med målfunktionskoefficient c_6 och bivillkorskoefficient 9 för villkor (*) och 1 för det andra villkoret.

Avgör för vilka värden på c_6 det måste gälla att $x_6 = 0$ i en optimallösning genom att dels använda dina resultat från deluppgift **a**, dels utnyttja möjligheten att lösa en möjligen modifierad version av Lagrangesubproblemet för multiplikatorvärdena $v = 1$ och $v = 2$. Motivera ditt svar på ett **kortfattat och relevant** sätt. Kvalitén på din beskrivning är avgörande för poängsättningen.

(2p)

Uppgift 6.

a. Studera följande kappsäcksproblem.

$$\begin{aligned} \max z = 10x_1 + 5x_2 & \\ \text{då} \quad 3x_1 + 4x_2 &\leq 4 \\ 0 \leq x_1 &\leq 1 \text{ heltal} \\ 0 \leq x_2 &\leq 1 \text{ heltal} \end{aligned}$$

Lös det givna kappsäcksproblemet med dynamisk programmering, bakåtrekursion. Innan du börjar lösa problemet, redovisa steg, styrvariabler, tillstånd, överföringsfunktion, optimalvärdesfunktion, rekursionssamband, randvillkor och variabelbegränsningar. Ange optimallösningen och dess målfunktionsvärde i svaret.

(2p)

b. Antag att du istället skulle vilja lösa följande kappsäcksproblem, där olikhetsvillkoret har bytts ut mot ett likhetsvillkor.

$$\begin{aligned} \max z = 10x_1 + 5x_2 & \\ \text{då} \quad 3x_1 + 4x_2 &= 4 \\ 0 \leq x_1 &\leq 1 \text{ heltal} \\ 0 \leq x_2 &\leq 1 \text{ heltal} \end{aligned}$$

Redogör för var det blir en skillnad i formuleringen med avseende på steg, styrvariabler, tillstånd, överföringsfunktion, optimalvärdesfunktion, rekursionssamband, randvillkor och variabelbegränsningar.

Lös det givna kappsäcksproblemet med dynamisk programmering, bakåtrekursion. Om och när det är möjligt får du gärna återanvända dina beräkningar från deluppgift **a**. Ange optimallösningen och dess målfunktionsvärde i svaret och jämför med ditt resultat i deluppgift **a**.

(1p)