Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP62 och TAOP37, TEN1
OPTIMERINGSLÄRA FORTSÄTTNINGSKURS för I och Ii

Datum:	23:e mars 2019
Tid:	8.00–13.00
Hjälpmedel:	Kurslitteratur av Lundgren m fl: ***Optimeringslära*** **lärobok**, nya upplagan med mjuk pärm, blå bok. Det är tillåtet med anteckningar och klisterlappar i läroboken. **Dubblesidigt A4-blad, handskrivna anteckningar**.
Antal uppgifter:	6 Varje uppgift kan ge högst 3 eller 4 poäng. För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Elina Rönnberg
Jourhavande lärare:	Elina Rönnberg 013-28 16 45

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

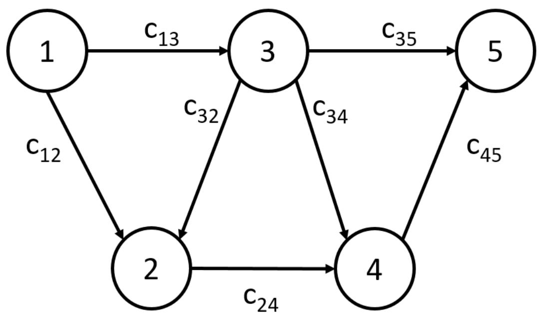
Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1.

I nedanstående graf motsvarar en nod en plats och en båge mellan två noder motsvarar att det går att färdas med cykel från den ena platsen till den andra. Kostnaden på en båge anger vägens längd.



a. Antag att du ska cykla från plats 1 till 5 och vill ta den kortaste vägen enligt de möjligheter som illustreras i grafen. Detta problem går att lösa med någon av de metoder vi lärt oss för att lösa billigaste väg problem men det går också att formulera som ett minkostnadsflödesproblem där ett flöde på en enhet ska skickas från nod 1 till nod 5.

Rita motsvarande minkostnadsflödesnätverk där du anger källor och sänkor samt för varje båge en kostnad och övre gräns för flödet. Antag att alla bågar ska ha samma övre gräns på flödet. Motivera kort vad som är ett bra val av övre gräns när minkostnadsflödesproblemet är ett billigaste väg problem. **(1p)**

b. I tidigare deluppgifter studerades problemet att hitta **en** billigaste väg från nod 1 till nod 5. Vi ska nu istället göra en minkostnadsflödesformulering för problemet att hitta billigaste vägen från nod 1 till varje annan nod.

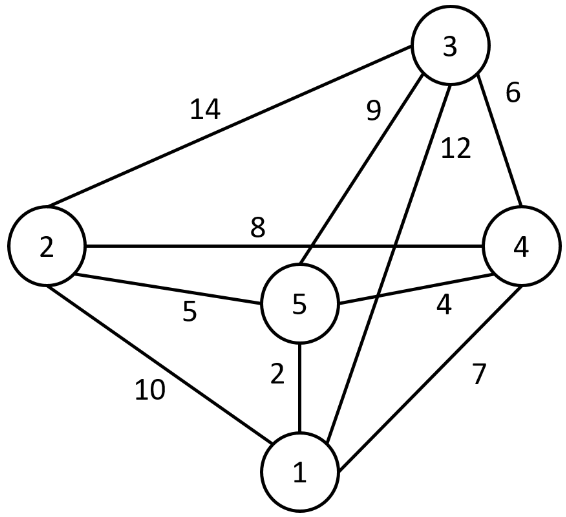
Rita motsvarande minkostnadsflödesnätverk där du anger källor och sänkor samt för varje båge en kostnad och övre gräns för flödet. Antag att alla bågar ska ha samma övre gräns på flödet. Motivera kort vad som är ett bra val av övre gräns på bågarna i detta fall. **(1p)**

c. Studera problemet i deluppgift **b** och antag att det har en unik optimallösning. Skulle flödet $x_{12} = 2,\ x_{13} = 2,\ x_{24} = 1,\ x_{34} = 1,\ x_{45} = 1$ (givet att bågkostnaderna väljs på ett lämpligt sätt) kunna vara optimallösningen?

Denna deluppgift bedöms på ett sådant sätt att ett **kortfattat och relevant** svar kan ge poäng och att det enbart är kvalitén på motiveringen som är avgörande för poängsättningen. Med kortfattat menas högst en halv sida. **(1p)**

Uppgift 2.

Studera följande nätverk.



a. Använd Prims algoritm för att beräkna ett billigaste uppspännande träd i nätverket. Utgå från nod 1. **(1p)**

b. Antag att du vill hitta en handelsresandetur som besöker samtliga noder i nätverket. Använd heuristiken Närmaste-addering för att konstruera en tillåten lösning. Utgå från nod 1. **(1p)**

c. Denna deluppgift är helt fristående från deluppgifterna och figuren ovan.

Givet ett oriktat nätverk och en given delmängd av bågar i detta nätverk. Gäller det då att *Den givna bågmängden är ett uppstännande träd om och endast om varje nod har minst en anslutande båge och bågmängden inte innehåller några cykler*?

Denna deluppgift bedöms på ett sådant sätt att ett **kortfattat och relevant** svar kan ge poäng och att det enbart är kvalitén på motiveringen som är avgörande för poängsättningen. Med kortfattat menas högst en halv sida. **(1p)**

Uppgift 3.

Ett nytt köpcenter ska byggas och det behöver avgöras vilka affärer som ska få vara hyresgäster i centret. Centret har ett antal våningsplan, som ges av mängden J, och varje våningsplan har m_j kvadratmeter som kan hyras ut som affärslokaler, $j \in J$. Låt mängden I innehålla de affärer som önskar en plats i centret och låt affär i ha ett behov av exakt a_i kvadratmeter om den ska hyra lokaler i centret, $i \in I$. Den hyra affär i är beredd att betala beror på vilket våningsplan affären ska ligga på och ges av parametern c_{ij}, $i \in I$, $j \in J$. En affär kan hyra lokal på maximalt ett våningsplan.

a. Formulera en linjär heltalsmodell som beskriver problemet att avgöra vilka affärer som ska få hyra plats på vardera våningsplan i köpcentret givet att centerinnehavaren vill maximera sina hyresintäkter. **(2p)**

b. För att göra centret attraktivt för besökare är det viktigt med en bra blandning mellan olika typer av affärer. Centerinnehavaren har därför delat in affärerna i ett antal grupper som ges av mängden K. Varje grupp $k \in K$ innehåller ett antal affärer som ges av mängden G_k, och det gäller att $G_k \subset I$.

Utöka modellen i deluppgift **a** med kraven att det på varje våning ska finnas högst u_k affärer av typ k och att det totalt sett i hela köpcentret ska finnas minst l_k affärer av typ k, $k \in K$. **(2p)**

Uppgift 4.

Betrakta det linjära heltalsproblemet

$$
\begin{array}{lllrrll}
\text{(HP)} & \max & z = & 4x_1 & +3x_2 & & \\
 & \text{då} & & 5x_1 & +3x_2 & \leq 15 & (1) \\
 & & & x_1 & +2x_2 & \leq 6 & (2) \\
 & & & -4x_1 & +3x_2 & \leq 1 & (3) \\
 & & & x_1, & x_2 & \geq 0, \text{heltal.} &
\end{array}
$$

Låt $s_1, s_2, s_3 \geq 0$ vara slackvariabler till bivillkor (1), (2) respektive (3).

En optimal simplextablå för problemets LP-relaxation har följande utseende.

basv.	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	$\bar{b}$	
z	1	0	0	5/7	3/7	0	93/7	(0)
x_1	0	1	0	2/7	−3/7	0	12/7	(1)
x_2	0	0	1	−1/7	5/7	0	15/7	(2)
s_3	0	0	0	11/7	−27/7	1	10/7	(3)

a. Generera Gomorysnitt ur raderna (2) och (3) i simplextablån som givits ovan och redovisa olikheterna enbart i de ursprungliga variablerna (utan slackvariabler). **(1p)**

b. Som fortsättning på deluppgift **a**, rita en (stor!) figur som illusterar det tillåtna området till problemets LP-relaxation och markera i samma figur vilka heltalslösningar som är tillåtna i problemet. Markera också var LP-optimum är och var Gomorysnitten som genererades i deluppgift **a** hamnar. **(1p)**

c. Gör en ny figur jämfört med deluppgift **b** där du ritar det tillåtna området och markerar det konvexa höljet. Utifrån din figur, teckna de villkor som definierar det konvexa höljet. **(1p)**

d. Antag att du löser ett heltalsproblem med Gomorys plansnittningsmetod. Studera fallet där problemet du försöker lösa saknar tillåtna heltalslösningingar men dess LP-relaxation har tillåtna lösningar. Hur kommer detta att upptäckas?

Denna deluppgift bedöms på ett sådant sätt att ett **kortfattat och relevant** svar kan ge poäng och att det enbart är kvalitén på motiveringen som är avgörande för poängsättningen. Med kortfattat menas högst en halv sida. **(1p)**

Uppgift 5.

Studera problemet

$$
\begin{array}{rrrrrrrll}
\min & z = 10y_1 & +14y_2 & +x_{11} & +3x_{12} & +3x_{21} & +2x_{22} & & \\
\text{då} & & & x_{11} & & +x_{21} & & = 4 & (1) \\
& & & & x_{12} & & +x_{22} & = 3 & (2) \\
& 2y_1 & & -x_{11} & -x_{12} & & & \geq 0 & (3) \\
& & 8y_2 & & & -x_{21} & -x_{22} & \geq 0 & (4) \\
& & & x_{11}, & x_{12}, & x_{21}, & x_{22} & \geq 0 & \\
& y_1, & y_2 & & & & & \in \{0,1\}. &
\end{array}
$$

a. Om bivillkor (3) och (4) Lagrangerelaxeras med multiplikatorerna $v_1 \geq 0$ respektive $v_2 \geq 0$ erhålles följande Lagrangesubproblem efter förenkling och uppdelning i så många delproblem som möjligt.

$$
\begin{array}{rrrll}
\min & z_A = (1+v_1)x_{11} & +(3+v_2)x_{21} & & \\
\text{då} & x_{11} & +x_{21} & = 4 & (1) \\
& x_{11}, & x_{21} & \geq 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\min & z_C = (10-2v_1)y_1 \\
\text{då} & y_1 \in \{0,1\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrll}
\min & z_B = (3+v_1)x_{12} & +(2+v_2)x_{22} & & \\
\text{då} & x_{12} & +x_{22} & = 3 & (2) \\
& x_{12}, & x_{22} & \geq 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\min & z_D = (14-8v_2)y_2 \\
\text{då} & y_2 \in \{0,1\}
\end{array}
$$

Du ska lösa Lagrangesubproblemen för multiplikatorvärdena $v_1 = 8$ och $v_2 = 2$. Om du kallar de erhållna optimala målfunktionsvärdena z_A^*, z_B^*, z_C^* respektive z_D^* så blir den duala funktionens värde $h(8,2) = z_A^* + z_B^* + z_C^* + z_D^*$.

Subproblemen ska lösas med inspektion (alltså inte någon specifik metod), beskriv kortfattat hur du tänkt när du gjort detta!

Vilken är den starkaste optimistiska respektive pessimistiska skattning av det optimala målfunktionsvärdet som erhålls från subproblemlösningarna? **(1p)**

b. Lagrangerelaxera bivillkor (1) och (2) med multiplikatorerna u_1 respektive u_2 så att Lagrangefunktionen blir $L(x,u) = 10y_1 + 14y_2 + x_{11} + 3x_{12} + 3x_{21} + 2x_{22} + u_1(4 - x_{11} - x_{21}) + u_2(3 - x_{12} - x_{22})$, där (3) och (4) är uppfyllda och $x_{11},\ x_{12},\ x_{21},\ x_{22} \geq 0,\ y_1,\ y_2 \in \{0,1\},\ u_1,\ u_2$ fria.

Teckna Lagrangesubproblemet, förenkla och dela upp det i så många delar som möjligt. Lös Lagrangesubproblemen för multiplikatorvärdena $u_1 = 5$ och $u_2 = 5$. Subproblemet ska lösas med en enkel heuristik som garanterat ger en optimallösning, beskriv på ett **kortfattat och relevant** sätt hur detta kan göras. Kvalitén på din beskrivning är avgörande för poängsättningen. Med kortfattat menas högst en halv sida.

Vilken är den starkaste optimistiska respektive pessimistiska skattning av det optimala målfunktionsvärdet som erhålls från subproblemlösningarna? **(2p)**

c. För vissa problem kan det vara möjligt att Lagrangerelaxera olika grupper av villkor. I vår uppgift relaxerades först villkor (3) och (4) och därefter villkor (1) och (2). Generellt sett, är det möjligt att untnyttja information från olika Lagrangerelaxationer för ett och samma problem? Oavsett om ditt svar är ja eller nej, motivera ditt svar på ett **kortfattat och relevant** sätt. Kvalitén på din beskrivning är avgörande för poängsättningen. Med kortfattat menas ungefär en halv sida. **(1p)**

Uppgift 6.

Ett företag ska planera sin tillverkning av tre sorters produkter, $j = 1, \ldots, 3$. För varje sorts produkt j är vinsten c_j tkr per tillverkad enhet och energiförbrukningen a_j energienheter per tillverkad enhet, $j = 1, \ldots, 3$. Totalt finns $A = 4$ energienheter tillgängliga för tillverkningen. Av varje sorts produkt j får företaget producera maximalt f_j enheter, $j = 1, \ldots, 3$.

Värdet för de givna parametrarna ges av nedanstående tabell.

j	c_j	a_j	f_j
1	5	1	2
2	8	2	2
3	10	3	1

a. Följande kappsäckproblem kan användas för att beräkna den maximala vinst företaget kan erhålla.

$$
\begin{aligned}
\max z &= 5x_1 + 8x_2 + 10x_3 \\
\text{då} \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 4 \\
& 0 \leq x_1 \leq 2 \text{ heltal} \\
& 0 \leq x_2 \leq 2 \text{ heltal} \\
& 0 \leq x_3 \leq 1 \text{ heltal}
\end{aligned}
$$

Lös det givna kappsäcksproblemet med dynamisk programmering, bakåtrekursion. Innan du börjar lösa problemet, redovisa steg, styrvariabler, tillstånd, överföringsfunktion, optimalvärdesfunktion, rekursionssamband, randvillkor och variabelbegränsningar. Ange en optimal tillverkningsplan och motsvarande vinst i svaret.

(2p)

b. I deluppgift **a** har du hjälpt företaget att beräkna den maximala vinst de kan få givet en tillgång på A energienheter. Beteckna den maximala vinst som kan erhållas från deluppgift **a** med C. Som en del i företagets miljöarbete vill de också utvärdera hur mycket de kan minska sin energiförbrukning givet att deras maximala vinst inte minskar med mer än 20%.

Ge en formulering som kan användas för att lösa det omformulerade problemet med dynamisk programmering, bakåtrekursion. Redovisa steg, styrvariabler, tillstånd, överföringsfunktion, optimalvärdesfunktion, rekursionssamband, randvillkor och variabelbegränsningar. Problemet ska inte lösas! **(1p)**