Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP62 och TAOP37, TEN1
OPTIMERINGSLÄRA FORTSÄTTNINGSKURS för I och Ii

Datum:	28:e augusti 2018
Tid:	8.00–13.00
Hjälpmedel:	Kurslitteratur av Lundgren m fl: ***Optimeringslära*** **lärobok**, nya upplagan med mjuk pärm, blå bok. Det är tillåtet med anteckningar och klisterlappar i läroboken. **Dubblesidigt A4-blad, handskrivna anteckningar**.
Antal uppgifter:	6 Varje uppgift kan ge högst 3 eller 4 poäng. För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Elina Rönnberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg 013-28 28 67

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1.

a. Ett projekt med aktiviteterna A, B, C, D, E och F ska genomföras. Tabellen nedan ger hur lång tid varje aktivitet förväntas ta och vilka aktiviteter som måste vara avslutade innan aktiviteten har tillåtelse att starta.

Moment	Föregångare	Tidsåtgång
A	-	2
B	-	1
C	-	4
D	A, B	3
E	C	2
F	D, E	1

Rita ett projektnätverk (med aktiviteterna på bågarna) som representerar problemet att minimera projektets sluttidpunkt. **(1p)**

b. Denna deluppgift handlar om problemställningen med punkter i planet som ges i Uppgift **2** och är en fortsättning på deluppgift **2a**, som man därför rekommenderas att göra innan denna deluppgift.

Antag att man har ett antal punkter i ett plan och vill dela in dem i två grupper, så att grupperna ligger så långt ifrån varandra som möjligt. Att grupperna ligger så långt ifrån varandra som möjligt betyder att om man betraktar alla avstånd mellan punkterna som ligger i olika grupper så ska det minsta av dessa avstånd vara så stort som möjligt. Det spelar ingen roll hur många punkter det är i vardera av grupperna.

Ge dels en generell beskrivning av hur ett sådant problem kan lösas och bygg vidare på reslutatet från deluppgift **2a** för att lösa detta problem för de fem punkter som givits där.

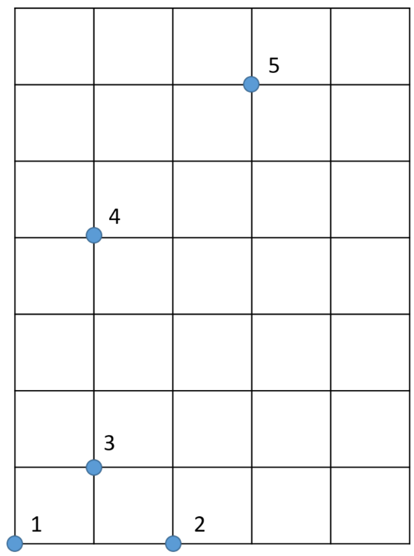
Denna deluppgift bedöms på ett sådant sätt att ett **kortfattat och relevant** svar kan ge poäng och att det enbart är kvalitén på motiveringen som är avgörande för poängsättnignen. Med kortfattat menas här en halv till en sida.

(Uppgiften är ett exempel på hur man, genom att kunna vissa teoriresultat, kan förstå hur en problemställning kan modelleras och hanteras på ett bra sätt.)

(2p)

Uppgift 2.

I nedanstående figur ges fem punkter i planet med koordinaterna (0,0), (2,0), (1,1), (1,4) och (3,6). Avståndet mellan punkterna ges i den bifogade matrisen.



Avståndsmatris

$$\begin{pmatrix} - & 2 & \sqrt{2} & \sqrt{17} & \sqrt{45} \\ - & - & \sqrt{2} & \sqrt{17} & \sqrt{37} \\ - & - & - & 3 & \sqrt{29} \\ - & - & - & - & \sqrt{8} \\ - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

På deluppgift **a** och **b** går det bra att ge svar där kostnaden för lösningen innehåller en summa av flera $\sqrt{\ }$-uttryck eftersom flera av avstånden i matrisen är av denna typ. Lägg inte engergi på att förenkla uttrycket!

a. Antag att avståndet mellan två punkter motsvarar kostnaden för att koppla samman dem. Använd Kruskals algoritm för att beräkna det billigaste sättet att koppla samman alla punkter. **(1p)**

b. Antag att du vill hitta en handelsresandetur som besöker samtliga punkter. Använd heuristiken Närmaste-granne för att konstruera en tillåten lösning. Utgå från nod 1. **(1p)**

c. Denna deluppgift är helt fristående från deluppgifterna och figuren ovan.

Antag att du ska lösa ett minkostnadsflödesproblem med Simplexmetoden för nätverksproblem och att alla bågar har en undre gräns för flödet som är 0 och att ingen båge har någon övre gräns på flödet. Kommer då ett uppspännande träd för nätverket alltid att motsvara en tillåten baslösning för minkostnadsflödesproblemet? Motivera och/eller ge exempel!

Denna deluppgift bedöms på ett sådant sätt att ett **kortfattat och relevant** svar kan ge poäng och att det enbart är kvalitén på motiveringen som är avgörande för poängsättnignen. Med kortfattat menas här ca en halv sida.

(1p)

Uppgift 3.

Följande deluppgifter är helt oberoende av varandra.

a. En fabrik ska köpa in en av sina viktigaste råvaror för den kommande produktionen. Det finns k olika leverantörer att tillgå och av tradition inom denna branch så ger varje leverantör i ett erbjudanden i form av att det går att köpa ett paket med p_i enheter av råvaran och att priset per sådant paket är c_i kr, $i = 1, \ldots, k$. Det går enbart att köpa hela paket.

Den övre gränsen på hur många paket leverantör i kan leverera är b_i och att köpa något från leverantör i är associerat med en fast kostnad f_i, $i = 1, \ldots, k$. Antag att fabriken behöver köpa L enheter råvara.

Formulera en linjär heltalsmodell som beskriver problemet att avgöra hur många paket av råvaran som ska köpas från vardera leverantör så att behovet av råvaran uppfylls och kostnaden för inköpen minimeras. **(2p)**

b. När man ska formulera en linjär heltalsmodell är det inte tillåtet att multiplicera två variabler med varandra, eftersom den resulterande funktionen då inte är linjär. Tyvärr är det ändå vanligt att lösningar till uppgifter på tentamen för Optimeringslära fortsättningskurs innehåller multiplikation av variabler. Denna uppgift går ut på att illustrera hur man ska göra istället!

Introducera de binära variablerna x_1, x_2 och y för vilka det ska gälla att $y = 1$ om och endast om $x_1 = x_2 = 1$, annars ska det gälla att $y = 0$. Det är logiskt korrekt att formulera denna relation med bivillkoret $y = x_1 x_2$, men detta är inte ett linjärt samband. Hur kan denna relation modelleras med enbart linjära bivillkor istället? **(1p)**

c. Antag att du har en linjär heltalsmodell med de binära variablerna $x_1, \ldots, x_n$ och de binära variablerna $y_1, \ldots, y_m$. Utöka denna modell med kravet att om någon av variablerna $x_1, \ldots, x_n$ antar värdet 1 så måste det gälla att $y_1 = \ldots = y_m = 0$.

Visa hur detta krav kan modelleras med linjära bivillkor och binära variabler.

(1p)

Uppgift 4.

Studera problemet

$$
\begin{aligned}
\text{(HP)} \qquad \max z = \ & 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 \\
\text{då} \ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 4 \\
& 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 4 \\
& x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 3 \\
& x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}.
\end{aligned}
$$

När ett problem ska lösas med Land-Doig-Dakins metod (se deluppgifterna nedan) använd strategin att:

- Förgrena över den variabel som har störst fraktionell del och om det finns flera sådana variabler att välja mellan, välj den med lägst index först.
- Avsök $\geq$-grenen först.
- Använd djup-först-sökning.

a. Om det andra och det tredje villkoret i (HP) relaxeras så erhålls problemet

$$
\begin{aligned}
\max z = \ & 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 \\
\text{då} \ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 4 \\
& x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}.
\end{aligned}
$$

Lös detta problem med Land-Doig-Dakins metod. **(1p)**

b. Med hjälp av en LP-lösare och genom att testa att fixera variabler så kan följande information om problemet (HP) tas fram.

Fixering	Lösning till LP-relaxationen
Ingen	$x_1 = 0.5,\ x_2 = 0.875,\ x_3 = 0.375$ med $z = 8.875$
$x_1 = 1$	$x_2 = 0.5,\ x_3 = 0$ med $z = 8$
$x_2 = 1$	$x_1 = 0.333,\ x_3 = 0.333$ med $z = 8.6667$
$x_3 = 1$	$x_1 = 0.5,\ x_2 = 0.25$ med $z = 7$
$x_1 = 0$	$x_2 = 1,\ x_3 = 0.5$ med $z = 7.5$
$x_2 = 0$	$x_1 = 1,\ x_3 = 0.5$ med $z = 6.5$
$x_3 = 0$	$x_1 = 0.8,\ x_2 = 0.8$ med $z = 8.8$

Lös (HP) med Land-Doig-Dakins metod, delproblemen i noderna löses med inspektion (huvudräkning) och hjälp av tabellen ovan. **(2p)**

c. Antag att du har löst deluppgift **a** men inte löst deluppgift **b**. Vilken är den starkaste slutsats du kan dra om optimallösningen till (HP), givet din lösning i deluppgift **a** och tabellen som ges i deluppgift **b**? Motivera ditt svar noga! Inga beräkningar annat än jämförelser av värden och avrundningar behöver göras.

Denna deluppgift bedöms på ett sådant sätt att ett **kortfattat och relevant** svar kan ge poäng och att det enbart är kvalitén på motiveringen som är avgörande för poängsättnignen. Med kortfattat menas här ca en halv sida.

(1p)

Uppgift 5.

Studera problemet

$$
\begin{array}{rlll}
\max z = & 6x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 & & \\
\text{då} & 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 & \leq 5 & (1) \\
& x_1 + x_2 & \leq 1 & \\
& x_3 + x_4 & \leq 1 & \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 & \in \{0, 1\}. &
\end{array}
$$

a. Lagrangerelaxera bivillkor (1) med multiplikatorn $v \geq 0$, teckna Lagrangefunktionen och Lagrangesubproblemet, som ska delas upp i två delproblem, över x_1, x_2 respektive x_3, x_4. Lös Lagrangesubproblemet för multiplikatorvärdena $v = 1/2$ och $v = 3/2$. Subproblemet ska lösas med inspektion (huvudräkning).

Vilken är den starkaste optimistiska respektive pessimistiska skattning av det optimala målfunktionsvärdet som erhålls från subproblemlösningarna? **(2p)**

b. Problemet som givits ovan är ett exempel på ett kappsäcksproblem (med jämnt antal variabler) med ytterligare bivillkor av typen att alla variabler har delats upp i par och att högst en av variablerna i varje par får ta värdet 1 ($x_1+x_2 \leq 1$, $x_3 + x_4 \leq 1$, $x_5 + x_6 \leq 1$, $\ldots$, $x_{n-1} + x_n \leq 1$). Nedan hänvisar begreppet *variabler i samma par* till att två variabler ingår i samma sådant villkor.

Antag att kappsäcksvillkoret har Lagrangerelaxerats som i deluppgift **a**. Följande är enkel heuristik som kan användas för att konstruera (förhoppningsvis) bra tillåtna lösningar utifrån subproblemlösningarna som då kan erhållas.

1. Givet en tillåten lösning: Gå igenom variablerna i nummerordning och se om det finns variabler i samma par som båda har värdet noll. Om det går att ett-sätta någon av variablerna utan att lösningen blir otillåten, gör det. Om båda är möjliga att ett-sätta (var för sig) så välj den med högst målfunktionskoefficient.
2. Givet att lösningen är otillåten: Gå igenom variablerna i nummerordning och se om det finns variabler i samma par där den ena har värdet ett och den andra har värdet noll. Testa att variablerna får byta värde med varandra, om detta gör att lösningen blir mindre otillåten, låt variablerna byta värde med varandra. Avbryt så snart en tillåten lösning erhållits.

Använd den givna heuristiken för att om möjligt hitta bra tillåtna lösningar till problemet givet dina subproblemlösningar i deluppgift **a**. Redovisa noga varje steg som görs i heuristiken. Vad blir den starkaste pessimistiska skattningen av det optimala målfunktionsvärdet efter att heuristiken använts? **(2p)**

Uppgift 6.

Ett värmeverk ska planera sitt inköp av flis till sin värmecentral för de kommande tre veckorna. Åtgången av flis förväntas vara 3, 2 och 2 ton i respektive vecka. När den första veckan börjar finns 2 ton flis i lager och när perioden är över måste minst 2 ton flis finnas i lager. Värmeverket kan enbart beställa hela ton flis och maximalt 3 ton per vecka. Leveransen sker direkt när veckan börjar. Kostnaden för flis är 1 tkr per ton.

Värmeverket kan maximalt lagra 4 ton från en vecka till nästa och lagerkostnaden, som baseras på hur mycket det finns i lager i början av en vecka, är 0,5 tkr per ton. Hur ska värmeverket göra för att minimera sina kostnader för flis?

a. Lös det givna problemet med dynamisk programmering, bakåtrekursion. Innan du börjar lösa problemet, redovisa steg, styrvariabler, tillstånd, överföringsfunktion, optimalvärdesfunktion, rekursionssamband, randvillkor och variabelbegränsningar. Ange en optimal produktionsplan och dess kostnad i svaret.

(2p)

b. I deluppgift **a** studerades ett något förenklat problem med avseende på hur kostnaden för inköp av flis ska hanteras. Uppdatera din formulering av problemet (rekursionssambandet) för att också ta hänsyn till följande information och redovisa beräkningarna i steg 3 för det nya rekursionssambandet. Lös inte om hela problemet!

Vid varje leverans av flis tillkommer en fast kostnad på 0,5 tkr. Värmeverket har en rabatt på flis i form av 10% lägre pris om de beställer 1 ton, 20% lägre pris om de beställer 2 ton och 30% lägre pris om de beställer 3 ton. **(1p)**