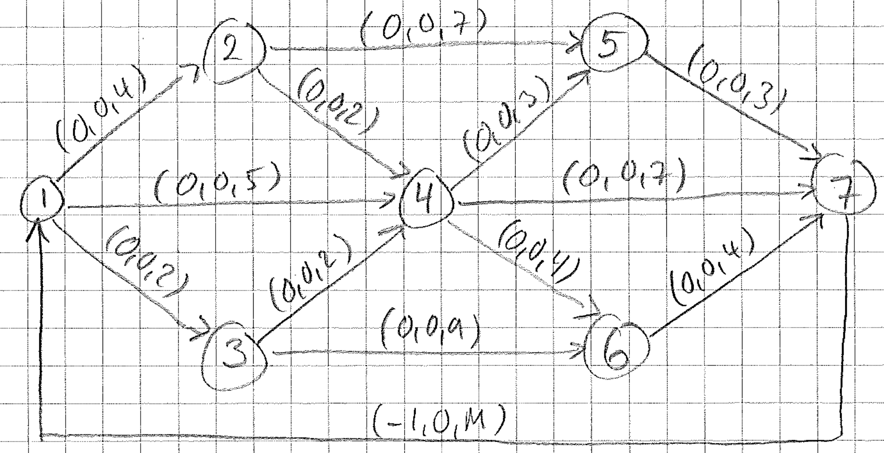
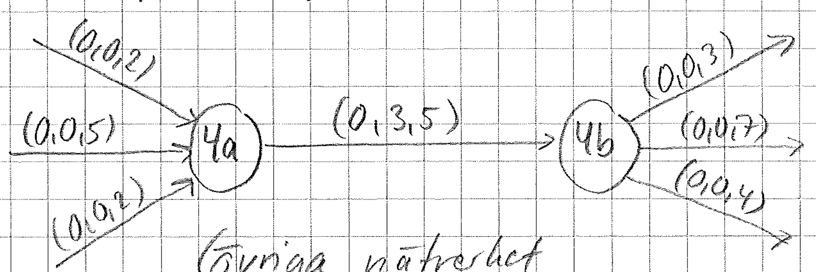
Svar och kommentarer TAOP62 180605

Uppgift 1

a)



b) Ja! Dela upp nod 4 i två och lägg krav på bågen mellan dem.



(övriga nätverket som tidigare)

c) För att få nodbalans i nod 2 krävs att flödet på båge (1,2) är 1. Nettoflödet från nod 1 blir då 4, så $\alpha = -4$.

I ett nätverk måste den totala flödesstyrkan för källor vara lika stor som den totala flödesstyrkan för sänkor, vilket gör att:

$\underbrace{4+1}_{\text{källor}} = \underbrace{2+\beta}_{\text{sänkor}}$, så $\beta = 3$.

Svar: $\alpha = -4$, $\beta = 3$.

Uppgift 2

a) Bellmans ekvationer:

$y_1 = \underline{0}$

$y_2 = \min\{y_1 + c_{12}\} = \min\{0+4\} = 4$

$y_3 = \min\{\underline{y_1 + c_{13}}\} = \min\{\underline{0+2}\} = \underline{2}$

$y_4 = \min\{y_1 + c_{14}, y_2 + c_{24}, \underline{y_3 + c_{34}}\} =$

$\min\{0+5, 4+2, \underline{2+2}\} = \min\{5, 6, \underline{4}\} = \underline{4}$

$y_5 = \min\{y_2 + c_{25}, \underline{y_4 + c_{45}}\} = \min\{4+7, \underline{4+3}\} = \underline{7}$

$y_6 = \min\{y_3 + c_{36}, y_4 + c_{46}\} = \min\{2+9, 4+4\} = 8$

$y_7 = \min\{\underline{y_5 + c_{57}}, y_4 + c_{47}, y_6 + c_{67}\} =$

$\min\{\underline{7+3}, 4+7, 8+4\} = \min\{\underline{10}, 11, 12\} = 10$

Billigaste väg: 1-3-4-5-7, kostnad 10

b) Gummibanden som ingår i den billigaste vägen är de som initialt börjar töjas när nod 1 och nod 7 dras isär. Längden på den billigaste vägen blir då $c_{13}(1+\delta) + c_{34}(1+\delta) + c_{45}(1+\delta) + c_{57}(1+\delta) =$

$L + L \cdot \delta$

Vid en isärdragning med Δ gäller således att $L + \Delta = L + L\delta \iff \delta = \Delta / L$

I detta fall fås $\delta = 2/10$

För att avgöra om ytterligare gummiband töjs beräknas den billigaste vägen där töjningen lagts till på alla bågar som ingick i den ursprungliga billigaste vägen. Om vägen fortfarande är billigast är det inga ytterligare band som töjs.

fort. uppg. 2b TAOP62 180605

Beräknar en ny billigaste väg med Bellmans ekvationer:

$y_1 = \underline{0}$

$y_2 = \min\{y_1 + c_{12}\} = \min\{0+4\} = 4$

$y_3 = \min\{\underline{y_1 + c_{13} + c_{13}\delta}\} = \min\{\underline{0 + 2 + \frac{4}{10}}\} = \underline{2 + \frac{4}{10}}$

$y_4 = \min\{y_1 + c_{14},\ y_2 + c_{24},\ y_3 + c_{34} + c_{34}\delta\} =$
$= \min\{0+5,\ 4+2,\ \underline{2 + \frac{4}{10} + 2 + \frac{4}{10}}\} = \min\{5, 6, \underline{4 + \frac{8}{10}}\} = \underline{4 + \frac{8}{10}}$

$y_5 = \min\{y_2 + c_{25},\ y_4 + c_{45} + c_{45}\delta\} =$
$\min\{4+7,\ 4 + \frac{8}{10} + 3 + \frac{6}{10}\} = \min\{11,\ 8 + \frac{4}{10}\} = 8 + \frac{4}{10}$

$y_6 = \min\{y_4 + c_{46},\ y_3 + c_{36}\} =$
$\min\{4 + \frac{8}{10} + 4,\ 2 + \frac{4}{10} + 9\} = \min\{8 + \frac{8}{10},\ 11 + \frac{4}{10}\} = 8 + \frac{8}{10}$

$y_7 = \min\{y_5 + c_{57} + c_{57}\delta,\ \underline{y_4 + c_{47}},\ y_6 + c_{67}\} =$
$= \min\{8 + \frac{4}{10} + 3 + \frac{6}{10},\ \underline{4 + \frac{8}{10} + 7},\ 8 + \frac{8}{10} + 4\} =$
$= \min\{12,\ \underline{11 + \frac{8}{10}},\ 12 + \frac{8}{10}\} = \underline{11 + \frac{8}{10}}$

Billigaste väg: 1 – 3 – 4 – 7, kostnad $11 + \frac{8}{10}$

Eftersom den billigaste vägen innehåller bågar som tidigare inte ingick i en billigaste väg så har ytterligare gummiband börjat töjas (4–7).

Uppgift 3

TAOP62 180605

a) Variabler: $y_j = \begin{cases} 1 & \text{om student } j \text{ väljs till gruppen} \\ 0, & \text{annars}, \quad j \in I. \end{cases}$

$$\max \sum_{j \in I} q_j y_j$$

då

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{j \in I} y_j = m \\ \sum_{j \in I_A} y_j \geq 2 \\ \sum_{j \in I_B} y_j \geq 2 \\ \sum_{j \in I_A \cup I_B} y_j \geq 5 \quad \left(\text{kan också skrivas } \sum_{j \in I_A} y_j + \sum_{j \in I_B} y_j \geq 5\right) \\ y_j \in \{0,1\}, \ j \in I \end{array}\right\} \text{Villkoren } (*)$$

b) Variabler: y_j, $j \in I$ enligt a-uppgiften

$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om student } i \text{ representeras av student } j \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

Modell: $$\max \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} p_{ij} x_{ij}$$

då

$$\sum_{j \in I} x_{ij} = 1 \quad i \in I$$

$$x_{ij} \leq y_j, \quad i \in I, \ j \in I$$

Villkoren (*)

fort. uppg. 3 TAOP62 180605

c) I denna deluppgift vill vi utöka målfunktionen med termen $\sum_{j\in I} q_j y_j$ men vikta den så att den enbart får betydelse om det handlar om att särskilja lösningar som är optimala i deluppgift b.

Låt målfunktionen vara: $\sum_{i\in I}\sum_{j\in I} p_{ij} x_{ij} + \frac{1}{M}\sum_{j\in I} q_j y_j$

Vi vet att $\sum_{i\in I}\sum_{j\in I} p_{ij} x_{ij}$ är heltalig ty p_{ij} och x_{ij} är heltaliga så M behöver väljas så att $\frac{1}{M}\sum_{j\in I} q_j y_j < 1$

Använd att $\sum_{j\in I} q_j = 10\cdot|I|$ och att $\sum_{j\in I} q_j y_j \leq 10\cdot|I|$ så följer att

$\frac{1}{10\cdot|I|+1}\sum_{j\in I} q_j y_j < 1$.

Svar: Byt målfunktionen i b mot

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in I} p_{ij} x_{ij} + \frac{1}{10\cdot|I|+1}\sum_{j\in I} q_j y_j$$

Uppgift 4

TAOP62 160605

a) **z-raden:**

$$z - \frac{7}{20}s_1 - \frac{11}{10}s_2 = \frac{217}{20} \iff$$

$$z - s_1 + \frac{13}{20}s_1 - 2s_2 + \frac{9}{10}s_2 = 10 + \frac{17}{20}$$

Heltalssnitt: $z - s_1 - 2s_2 - 10 \leq 0$

sätt in: $z = 4x_1 + 5x_2$, $s_1 = 2x_1 + 8x_2 - 9$, $s_2 = 3x_1 + 2x_2 - 7$

så erhålles $4x_1 + 5x_2 - 2x_1 - 8x_2 + 9 - 6x_1 - 4x_2 + 14 - 10 \leq 0$

$\iff 4x_1 + 7x_2 \geq 13$

x_1-raden:

$$x_1 + \frac{1}{10}s_1 - \frac{2}{5}s_2 = \frac{19}{10} \iff x_1 + \frac{1}{10}s_1 - s_2 + \frac{3}{5}s_2 = 1 + \frac{9}{10}$$

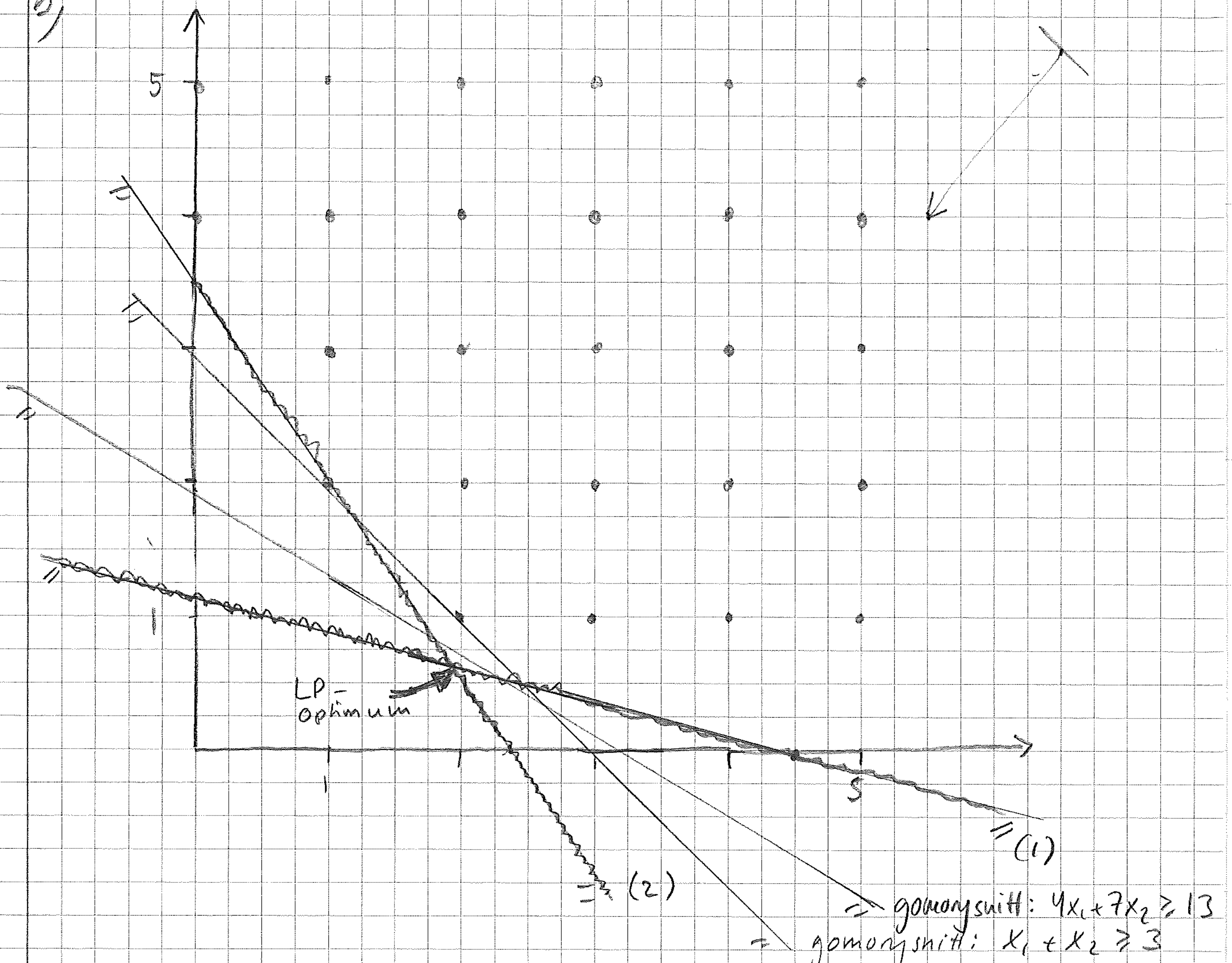
Heltalssnitt: $x_1 - s_2 - 1 \leq 0$

sätt in $s_2 = 3x_1 + 2x_2 - 7$ så fås

$x_1 - 3x_1 - 2x_2 + 7 - 1 \leq 0 \iff x_1 + x_2 \geq 3$

Svar: Från z-raden fås $4x_1 + 7x_2 \geq 13$,
från x_1-raden fås $x_1 + x_2 \geq 3$

b)



o = tillåtna heltalspunkter

Rimlighetsbedömning:
Samtliga snitt skär bort LP-optimum
men ingen heltalspunkt.

Fort. uppg. 4 TAOP62 130605

c) (Vald lösning är understruken)

Iter,	Steg					Tabulista:
0	1	<u>(0,0) till.</u> $g_1 = 0$				
1	1	<u>(0,1) till.</u> $g_1 = 8$	(0,-1) otill. —	(1,0) till. $g_1 = 2$	(-1,0) otill. —	—
2	1	<u>(0,2) till.</u> $g_1 = 16$ Tillåten map (1), starta steg 2, $g_2 = 4$	(0,0) till. tabu	(1,1) till $g_1 = 10$	(-1,1) otill. —	x_2 minskar
3	2	(0,3) till. $g_2 = 6$	(0,1) otill. tabu map (1)	<u>(1,2) till.</u> $g_2 = 7$ Tillåten map (2), starta steg 3, $z = 14$	(-1,2) otill. —	x_2 minskar
4	3	(1,3) till. $z = 19$	(1,1) otill. — map (2)	<u>(2,2) till.</u> $z = 18$ (bäst i omgivningen om sämre än (1,2))	(0,2) till. tabu	x_1 minskar
5	3	(2,3) till $z = 23$	<u>(2,1) till.</u> $z = 13$	(3,2) till. $z = 22$	(1,2) till. tabu	x_1 minskar
6	3	(2,2) till. tabu	(2,0) otill. —	<u>(3,1) till</u> $z = 17$	(1,1) otill —	x_2 ökar

Svar: Den bästa lösningen erhölls i iteration 6 och är $x = (2,1)$, $z = 13$.

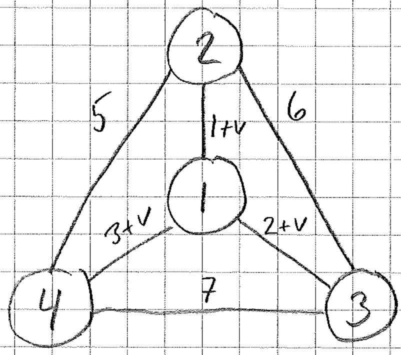
Uppgift 5 TAOP62 180605

a) $L(x,v) = \sum_{(i,j)\in B} c_{ij}x_{ij} - v(2 - x_{12} - x_{13} - x_{14}) =$

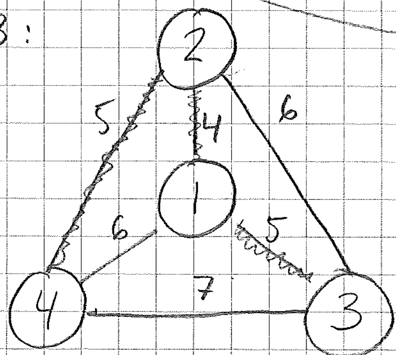
$= (1+v)x_{12} + (2+v)x_{13} + (3+v)x_{14} + 5x_{24} + 6x_{23} + 7x_{34} - 2v$

då $v \geq 0, x \in T$. Dual funktion: $h(v) = \min_{x\in T} L(x,v)$, $v \geq 0$

Graf:



för $v=3$:



Prim: (kan börja med valfri nod, 2 känns naturligt)

Iteration	Nodmängd	Ny båge	Kostnad	Totalkostnad
1	2	(1,2)	4	4
2	2,1	(1,3)	5	9
3	2,1,3	(2,4)	5	14

(I denna iterationen hade det varit ok att välja (2,4) också)

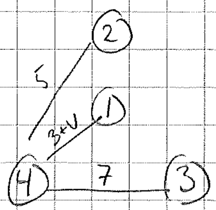
$h(3) = 14 - 2\cdot 3 = 8$ (optimistisk skattning)

I subproblemlösningen är det exakt två bågar som ansluter till nod 1 och lösningen är därför tillåten. Beräknar dess målfunktionsvärde som blir $1+2+5 = 8$ (pessimistisk skattning)

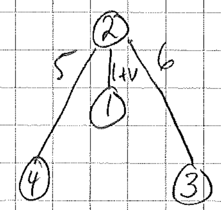
Svar: Eftersom den optimistiska och pessimistiska skattningen har samma värde är den tillåtna lösningen optimal, med målfunktionsvärde 8.

b) Vilka värden på v behöver undersökas?

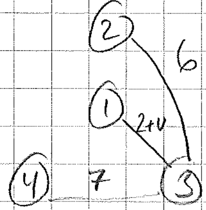
Varje hyperplan som behövs för att definiera den duala funktionen svarar mot en subproblemlösning. Om man använder optimalitetsvillkoren som ligger till grund för Prims algoritm inses att de alternativa lösningarna (= brytpunkterna i duala funktionen) bara kan inträffa för de värden på v som ger alternativa lösningar mht anslutande bågar till nod 2, 3 och 4:



$V = 2,4$



$V = 4,5$

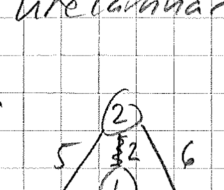


$V = 4,5$

För att hitta hyperplanen räcker det att lösa subproblem för värden på v som ligger mellan brytpunkterna, exempelvis $V=1$, $V=3$, $V=4,5$ och $V=6$.

(Jag utelämnar beräkningarna för subproblemen)

$\underline{V=1}$:

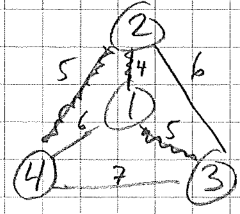


I lösningen ingår bågarna $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$ och det är dessa som kommer ingå för $V \in [0,2]$.

I detta intervall för v fås således

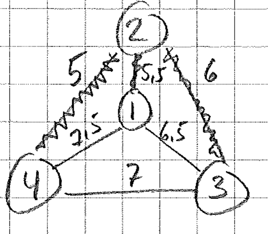
$$h(v) = \min_{x \in T} L(x,v) = 1+v+2+v+3+v-2v = v+6$$

$v=3$:



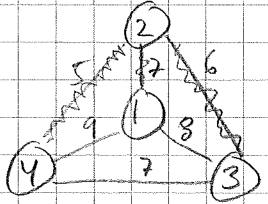
För $v \in [2,4]$ ingår bågarna $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,4)$ och då fås $h(v) = 1+v+2+v+5-2v = 8$

$v=4{,}5$:



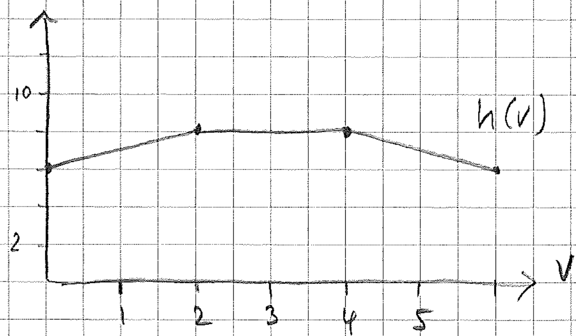
För $v \in [4,5]$ ingår bågarna $(1,2)$, $(2,4)$, $(2,3)$ och då fås $h(v) = 1+v+5+6-2v = -v+12$

$v=6$:



För $v \geq 5$ fås samma lösning som för $v \in [4,5]$ (minst 1 båge måste ju ansluta till nod 1, annars fås inget träd).

$$h(v) = \begin{cases} v+6, & 0 \leq v \leq 2 \\ 8, & 2 \leq v \leq 4 \\ -v+12, & 4 \leq v \end{cases}$$



Samtliga $v \in [2,4]$ är optimala, $h(v^*) = 8$

TAOP62 180605

Uppgift 6

a) Steg: $t = 1,2,3$

Styrvariabler: x_t = antal enheter av sort t, $t = 1,2,3$

Tillstånd: S_t = antal enheter som kan användas i steg t och framåt, $t = 1,2,3$

Överföringsfunktion: $S_{t+1} = S_t - a_t x_t$, där $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$

Optimalvärdesfunktion: $f_t(S_t)$ = maximalt målfunktionsvärde i steg t till 3

Rekursionssamband: $f_t(S_t) = \max_{x_t} \{ f_{t+1}(S_{t+1}) + c_t x_t \}$ där $c_1 = 2$, $c_2 = 3$, $c_3 = 5$

Randvillkor: $S_1 = 4$, $S_4 = 0$, $f_4(S_4) = 0$

Variabelbegränsningar: $0 \le x_1 \le 2$, $0 \le x_2 \le 2$, $0 \le x_3 \le 1$

Steg 3:

$$\begin{cases} S_4 = S_3 - a_3 x_3 \\ S_4 = 4,\ a_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_4 = S_3 - 3x_3 \\ S_4 = \end{cases}$$

Tjänar: $f_4(S_4) + c_3 x_3 = 0 + 5x_3 = 5x_3$

x_3 \ S_3	0	1	2	3	4
0	$S_4 = 0-3\cdot0 = 0$ $5\cdot0 = 0$	$S_4 = 1-3\cdot0 = 1$ —	$S_4 = 2-3\cdot0 = 2$ —	$S_4 = 3-3\cdot0 = 3$ —	$S_4 = 4-3\cdot0 = 4$ —
1	$S_4 = 0-3\cdot1 = -3$ —	$S_4 = 1-3\cdot1 = -2$ —	$S_4 = 2-3\cdot1 = -1$ —	$S_4 = 3-3\cdot1 = 0$ $5\cdot1 = 5$	$S_4 = 4-3\cdot1 = 1$ —
$x_3^*(S_3)$	0	—	—	1	—
$f_3(S_3)$	0	—	—	5	—

OBS: I nästa steg är alltså enbart $S_3 = 0$ och $S_3 = 3$ möjligt.

fort. uppg. 6a

TAOP37 180605

Steg 2:

$$\begin{cases} S_3 = S_2 - a_2 x_2 \\ S_3 \in \{0, 3\}, \ a_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_3 = S_2 - 2x_2 \\ S_3 \in \{0, 3\} \end{cases}$$

Tjänar: $f_3(S_3) + c_2 x_2 = f_3(S_3) + 3x_2$

x_2 \ S_2	0	1	2	3	4
0	$S_3 = 0-2\cdot0 = 0$ $0+3\cdot0 = 0$	$S_3 = 1-2\cdot0 = 1$ —	$S_3 = 2-2\cdot0 = 2$ —	$S_3 = 3-2\cdot0 = 3$ $5+3\cdot0 = 5$	$S_3 = 4-2\cdot0 = 4$ —
1	$S_3 = 0-2\cdot1 = -2$ —	$S_3 = 1-2\cdot1 = -1$ —	$S_3 = 2-2\cdot1 = 0$ $0+3\cdot1 = 3$	$S_3 = 3-2\cdot1 = 1$ —	$S_3 = 4-2\cdot1 = 2$ —
2	$S_3 = 0-2\cdot2 = -4$ —	$S_3 = 1-2\cdot2 = -3$ —	$S_3 = 2-2\cdot2 = -2$ —	$S_3 = 3-2\cdot2 = -1$ —	$S_3 = 4-2\cdot2 = 0$ $0+3\cdot2 = 6$
$x_2^*(S_2)$	0	—	1	0	2
$f_2(S_2)$	0	—	3	5	6

Steg 1:

$$\begin{cases} S_2 = S_1 - a_1 x_1 \\ S_2 \in \{0, 2, 3, 4\}, \ a_1 = 1, \ S_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_2 = 4 - x_1 \\ S_2 \in \{0, 2, 3, 4\} \end{cases}$$

Tjänar: $f_2(S_2) + 2x_1$

x_1 \ S_1	4
0	$S_2 = 4-0 = 4$, $6+2\cdot0 = 6$
1	$S_2 = 4-1 = 3$, $5+2\cdot1 = 7$
2	$S_2 = 4-2 = 2$, $3+2\cdot2 = 7$
$x_1^*(S_1)$	2 el 1
$f_1(S_1)$	7

Nysta upp, finns 2 alternativ:

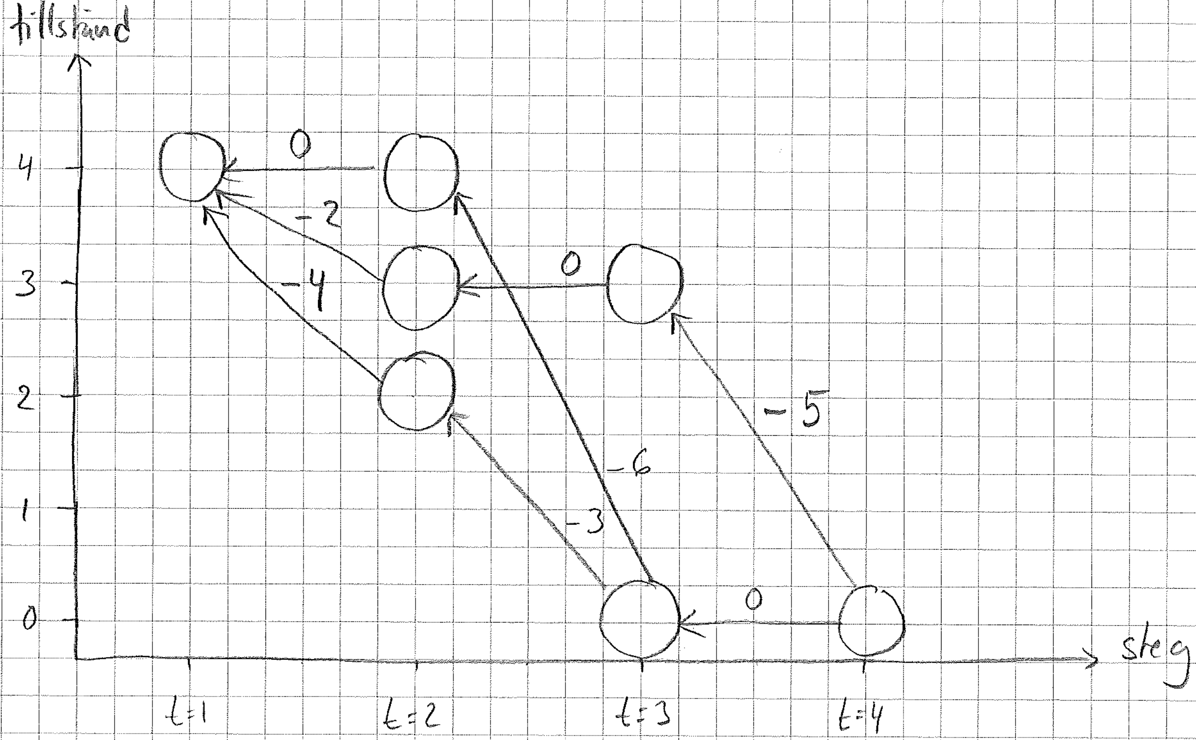
1) $x_1 = 2 \Rightarrow S_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow$
$S_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$

2) $x_1 = 1 \Rightarrow S_2 = 3 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow$
$S_3 = 3 \Rightarrow x_3 = 1$

Så, det finns två lösningar $x^* = (2,1,0)$ och $x^* = (1,0,1)$ med $z^* = 7$

forts uppg. 6 TAOP62 180518

b)



I nätverket har jag enbart ritat med de noder och bågar som kan ingå i en väg (exempelvis är nod $t=2$, $S_2=0$ ej med)