Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP62 och TAOP37, TEN1
OPTIMERINGSLÄRA FORTSÄTTNINGSKURS för I och Ii

Datum:	5:e juni 2018
Tid:	14.00–19.00
Hjälpmedel:	Kurslitteratur av Lundgren m fl: ***Optimeringslära*** **lärobok**, nya upplagan med mjuk pärm, blå bok. Det är tillåtet med anteckningar och klisterlappar i läroboken. **Dubblesidigt A4-blad, handskrivna anteckningar**.
Antal uppgifter:	6 Varje uppgift kan ge högst 3 eller 4 poäng. För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Elina Rönnberg
Jourhavande lärare:	Elina Rönnberg 013-28 16 45

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1.

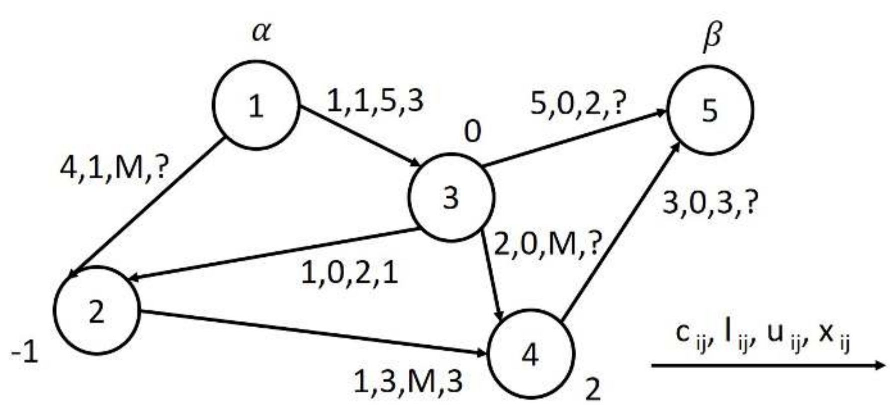
a. Studera det nätverk som ges i uppgift 2 (på nästa sida!), men tänk att den kostnad som angivits på bågarna istället är den maximala kapaciteten för bågen och att den undre gränsen är 0 för samtliga bågar.

Rita ett minkostnadsflödesnätverk som beskriver problemet att maximera det totala flödet från nod 1 till nod 7. **(1p)**

b. Antag att du vill utöka problemställningen i deluppgift **a** med kravet att minst 3 och maximalt 5 enheter får passera nod 4.

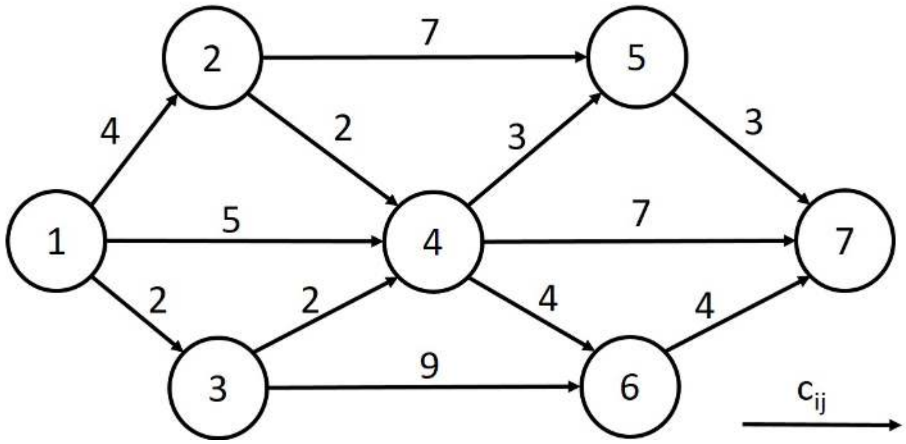
Kan denna aspekt tas med i nätverket? Om ja: Rita det aktuella nätverket. Om nej: Motivera kort varför. En eventuell motivering bedöms på ett sådant sätt att ett kortfattat och relevant svar kan ge poäng. Med kortfattat menas här maximalt 10 rader text med normalstor handstil. **(1p)**

c. Studera minkostnadsflödesnätverket



som givits tillsammans med viss information om en tillåten lösning till problemet (ett ? betyder att du inte har tillgång till den informationen). Vilka värden kan nodstyrkorna α och β anta? Motivera ditt svar! **(1p)**

Uppgift 2.



a. Beräkna den billigaste vägen i nätverket som givits ovan genom att lösa Bellmans ekvationer i nummerordning. **(1p)**

b. Antag att bågarna i nätverket motsvarar gummiband, där båglängden motsvarar deras längd när de ligger utsträckta utan att bli töjda, och att noderna motsvarar att gummiband har fästs samman. En billigaste väg i nätverket motsvarar det längsta avstånd mellan nod 1 och nod 7 som kan erhållas utan att töja på gummibanden.

Beteckna längden på en billigaste väg med L och antag att man genom att dra nod 1 och nod 7 i rakt motsatta riktningar gör avståndet mellan noderna $L + \Delta$, $\Delta > 0$. Det som kommer att hända när noderna dras isär är att vissa gummiband kommer att börja töjas och då kommer deras längd öka proportionellt med deras nuvarande längd. Detta innebär att om den ursprungliga längden på gummibandet är l så kommer den utdragna längden att bli $l(1+\delta)$, $\delta > 0$. Om gummibanden dras isär tillräckligt mycket kommer succesivt fler och fler gummiband att börja töjas.

Om man drar isär nod 1 och nod 7 så att $\Delta = 2$, kommer då ytterligare gummiband än de som direkt börjar töjas att töjas, eller är det bara samma gummiband som töjs? **(2p)**

Uppgift 3.

Studenterna på I-programmet ska gemensamt fatta beslut i en viktig fråga och har därför designat ett omröstningssytem för att välja ut en grupp studenter som ska få ta beslutet. Denna uppgift handlar om att skapa en matematisk modell som kan användas för att utse gruppen.

För att kunna ta ett bra beslut är det viktigt att studenter från två intresseorganisationer, A och B, finns representerade i gruppen. Man vill välja minst två personer från intressegrupp A och minst två personer från intressegrupp B, och från intressegrupp A och B tillsammans vill man sammanlagt välja minst 5 personer.

Låt mängden I innehålla samtliga studenter och låt mängderna I_A och I_B innehålla stundeterna i intressegrupp A repsektive B.

Inför valet har varje student fått ange en poängtilldelning till de studenter som den vill ska ha god chans att bli valda (inklusive sig själv). Varje student har 10 sådana poäng att fördela, alla poäng måste fördelas och enbart hela poäng kan ges. Poängen översätts i parametern p_{ij} = hur bra student i tycker det är om student j blir vald, $p_{ij} >= 0$, $i \in I$, $j \in I$ (där $p_{ij} = 0$ om student i ej givit poäng till student j).

a. Givet poängsättningen ovan går det att summera den totala poängen för en student $q_j = \sum_{i \in I} p_{ij}$, $j \in I$. Denna summa kan ses som ett mått på hur bra det är om en student väljs.

Formulera en linjär heltalsmodell som beskriver problemet att välja ut m studenter, med hänsyn till representation från intresseorganisationerna, så att den totala summan av poäng för dessa studenter maximeras. **(2p)**

b. I denna uppgift antar vi att det är viktigt att för varje student välja ut **vilken** av studenterna den blir representerad av, och enbart räkna poängen som ges av parametern p_{ij} om det är student j som väljs att representera student i.

Formulera en linjär heltalsmodell som beskriver problemet att välja ut m studenter, med hänsyn till representation från intresseorganisationerna, så att den totala summan av poäng för de studenter som väljs att representera en student maximeras. **(1p)**

c. Det finns en risk att modellen i deluppgift **b** har alternativa optimallösningar. För att minska den risken ska modellen utökas med en komponent som gör att bland de lösningar som är optimala i deluppgift **b**, väljs i första hand studenter som har en hög total poäng q_j, $j \in I$.

Formulera en linjär heltalsmodell som utökar din modell från deluppgift **b** med med kravet som beskrivits i denna deluppgift. Om *ett tillräckligt stort (litet) tal* används måste det specificeras uttryckt i givna parametervärden. **(1p)**

Uppgift 4.

Betrakta det linjära heltalsproblemet

$$\begin{aligned} \min z &= 4x_1 + 5x_2 \\ \text{då} \quad g_1(x) &= 2x_1 + 8x_2 \geq 9 \quad (1) \\ g_2(x) &= 3x_1 + 2x_2 \geq 7 \quad (2) \\ x_1, x_2 &\geq 0, \text{heltal}. \end{aligned}$$

Notera att bivillkoren är av typen $\geq$ och låt $s_1 \geq 0$ och $s_2 \geq 0$ vara slackvariabler till villkor (1) respektive (2).

En optimal simplextablå för problemets LP-relaxation har följande utseende.

basv.	z	x_1	x_2	s_1	s_2	$\bar{b}$
z	1	0	0	$-7/20$	$-11/10$	$217/20$
x_1	0	1	0	$1/10$	$-2/5$	$19/10$
x_2	0	0	1	$-3/20$	$1/10$	$13/20$

a. Generera Gomorysnitt ur $z-$ och x_1- raden i simplextablån som givits ovan och redovisa snitten uttryckt enbart i de ursprungliga variablerna (alltså utan slackvariabler). **(1p)**

b. Som fortsättning på deluppgift **a**, rita en (stor!) figur som illusterar det tillåtna området till problemets LP-relaxation (det räcker att titta på området där $0 \leq x_1 \leq 5$, $0 \leq x_2 \leq 5$) och markera i samma figur vilka heltalslösningar som är tillåtna i problemet. Markera var LP-optimum är och var Gomorysnitten som genererades i deluppgift **a** hamnar. **(1p)**

c. I denna deluppgift ska vi söka lösningar till ovanstående problem med hjälp av tabusökning. I den generella beskrivningen av en tabusökning utgår vi från en tillåten lösning och förutsätter att denna hittats på något sätt. I detta fall kommer vi att utgå från en lösning som inte behöver vara tillåten i det ursprungliga problemet och det kommer vara en del i tabusökningen att hitta en tillåten lösning. För att åstadkomma detta kommer vi att inledningsvis relaxera villkor (1) och (2), och starta i en lösning som är tillåten med avseende på det relaxerade problemet.

Tabusökningen ska ske i 3 steg:

1. Gör tabusökning där bivillkor (1) och (2) är helt relaxerade och där målfuktionen är $\max g_1(x)$. Steg 1 är färdigt när en lösning som uppfyller $g_1(x) >= 9$ erhålls. Beräkna $g_2(x)$ för denna lösning som en förberedelse för steg 2.
2. Starta i lösningen som erhölls i steg 1. Gör tabusökning där bivillkor (2) är helt relaxerat, bivillkor (1) måste uppfyllas och där målfuktionen är $\max g_2(x)$. Steg 2 är färdigt när en lösning som uppfyller $g_2(x) >= 7$ erhålls. Beräkna z för denna lösning som en förberedelse för steg 3.
3. Starta i lösningen som erhölls i steg 2. Gör tabusökning där bivillkor (1) och (2) måste uppfyllas och där målfuktionen är $\min z = 4x_1 + 5x_2$ (alltså problemets ursprungliga målfunktion).

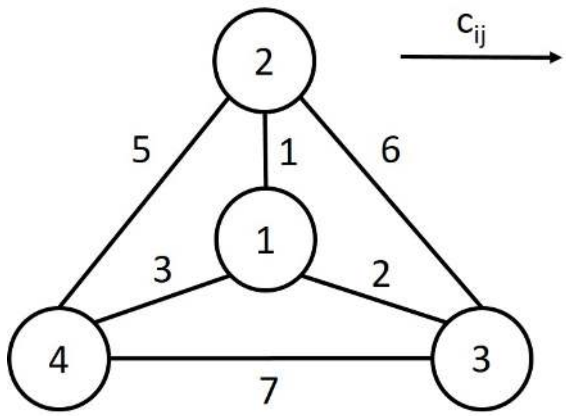
Generella specifikationer för tabusökningen:

- Startlösning i Steg 1: $x = (0, 0)$
- Omgivning: De tillåtna lösningar som erhålles då en variabel antingen ökar sitt värde med 1 eller minskar sitt värde med 1. Observera att innebörden av vad som är en tillåten lösning beror av i vilket steg sökningen är i.
- Vilken lösning i omgivningen som ska väljas till att vara nästa lösning beror på vilken målfunktion som är aktuell och detta beror på i vilket steg sökningen befinner sig i.
- Tabu: Att en variabel byter tillbaka till det värde den hade i föregående iteration.
- Tabulistans längd: 1. Tabulistan behålles vid övergången mellan stegen.
- Antal iterationer, totalt sett i steg 1-3: 6

Genomför en tabusökning enligt ovanstående specifikationer, markera tydligt i lösningsgången var övergången mellan de tre stegen sker. **(2p)**

Uppgift 5.

Studera följande oriktade graf.



I denna uppgift studeras problemet att finna ett billigaste uppspännande träd i grafen ovan sådant att högst två bågar får ansuta till nod 1.

Låt mängden B innehålla alla bågar som ges i grafen ovan och introducera variabeln

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{om båge}(i,j) \text{ ingår i det uppspännande trädet, } (i,j) \in B \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Låt mängden T innehålla de lösningar $x = (x_{ij})_{(i,j)\in B}$ som utgör uppspännande träd. I uppgiften är det tillåtet (och rekommenderat) att, istället för att skriva ut de bivillkor som x behöver uppfyllla för att vara ett uppspännande träd, använda beteckningen $x \in T$ för att uttrycka detta.

a. Lagrangerelaxera bivillkoret att högst två bågar får ansuta till nod 1 med multiplikatorn $v \geq 0$, teckna Lagrangefunktionen och rita den resulterande grafen. Lös Lagrangesubproblemet för multiplikatorvärdet $v = 3$. Subproblemet ska lösas med Prims algoritm.

Vilken är den starkaste optimistiska respektive pessimistiska skattning av det optimala målfunktionsvärdet som erhålls från denna subproblemlösning? **(2p)**

b. Teckna den Lagrangeduala funktionen explicit, rita den Lagrangeduala funktionen och lös det Lagrangeduala problemet grafiskt. Tänkt igenom och motivera noga vilka värden på v som alls behöver undersökas för att lösa denna uppgift. **(2p)**

Uppgift 6.

Studera följande kappsäcksproblem.

$$
\begin{aligned}
\max z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\
\text{då} \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\
0 \leq x_1 \leq 2 \text{ heltal} \\
0 \leq x_2 \leq 2 \text{ heltal} \\
0 \leq x_3 \leq 1 \text{ heltal}
\end{aligned}
$$

a. Lös det givna problemet med dynamisk programmering, bakåtrekursion. Innan du börjar lösa problemet, redovisa steg, styrvariabler, tillstånd, överföringsfunktion, optimalvärdesfunktion, rekursionssamband, randvillkor och variabelbegränsningar. Ange en optimal produktionsplan och dess kostnad i svaret.

(2p)

b. Rita ett billigaste väg nätverk som motsvarar att lösa problemet med dynamisk programmering, bakåtrekursion. Observera att det i figuren tydligt ska framgå vilken månad och lagernivå som varje nod motsvarar, samt vilken riktning och kostnad varje båge har. (Problemet ska ej lösas.) **(1p)**