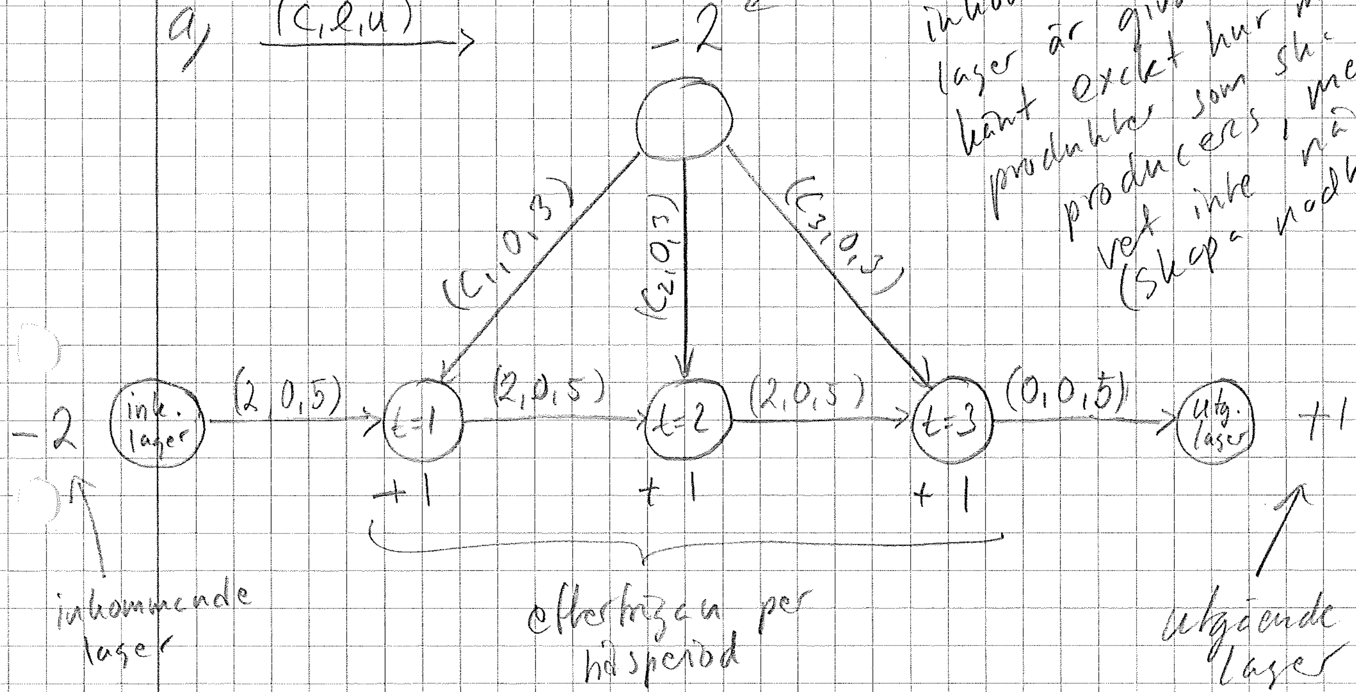
Uppgift 1

a) $(c, l, u) \rightarrow$

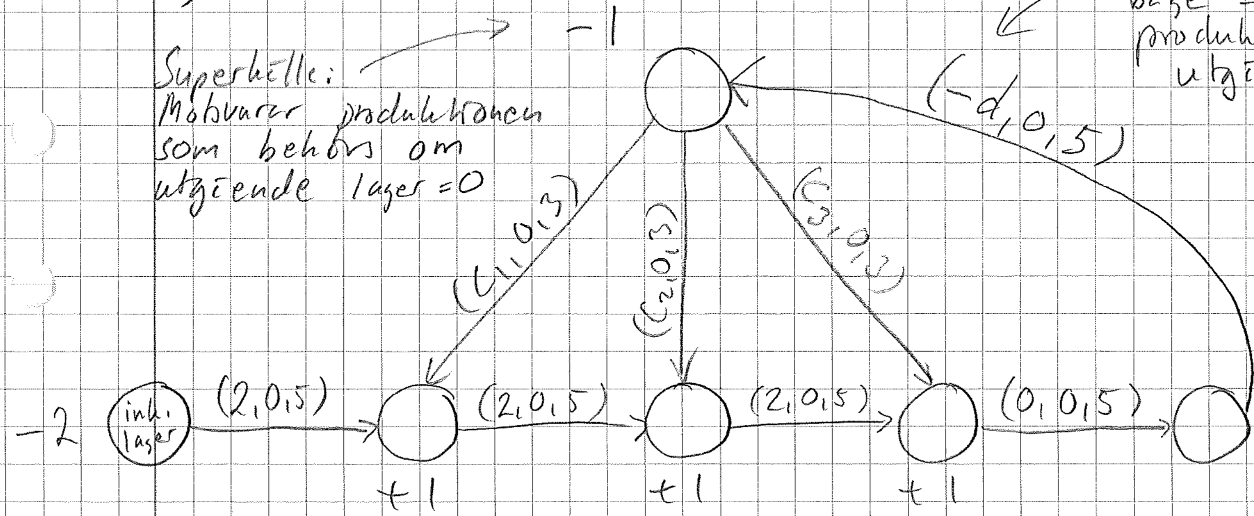
Superkälla: Eftersom efterfrågan, inkommande och utgående lager är givna så är det känt exakt hur många produkter som ska produceras, men man vet inte när. (Skapa nodbalans!)



b) $(c, l, u) \rightarrow$

Superkälla: Motsvarar produktionen som behövs om utgående lager = 0

Flödet på denna båge = antal produkter i utgående lager



Uppgift 2

a)

Beräknar "flöde in" − "flöde ut" för varje nod

1: $0-(3+1)=-4$; källa styrka 4, ok
2: $3-(2+0+1)=0$, mellannod, ok
3: $2+1=3$, sänka styrka 3, ok
4: $1+1-3=-1$, källa styrka 1, ok
5: $0+3-1=2$, sänka styrka 2, ok

Slutsats: flödet är tillåtet

Beräkning av nodpriser (red. kostn. = 0 för basbågar)

$y_1 = 0$

$\bar{c}_{12} = c_{12}+y_1-y_2 = 1+0-y_2 = 0 \iff y_2 = 1$

$\bar{c}_{24} = c_{24}+y_2-y_4 = 1+1-y_4 = 0 \iff y_4 = 2$

$\bar{c}_{25} = c_{25}+y_2-y_5 = 2+1-y_5 = 0 \iff y_5 = 3$

$\bar{c}_{53} = c_{53}+y_5-y_3 = 3+3-y_3 = 0 \iff y_3 = 6$

Reducerad kostnad, icke-basbågar:

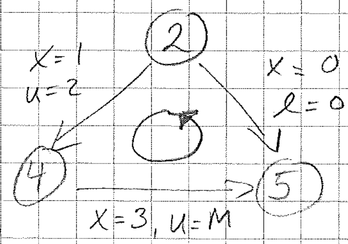
$\bar{c}_{14} = c_{14}+y_1-y_4 = 4+0-2 = 2$, $x_{14} = 1 = l_{14}$, optimalt

$\bar{c}_{45} = c_{45}+y_4-y_5 = 1+2-3 = 0$, $x_{45} = 3 = l_{45}$, optimalt

$\bar{c}_{23} = c_{23}+y_2-y_3 = 5+1-6 = 0$, $x_{23} = 2 = u_{23}$, optimalt

Svar: Baslösningen är optimal

b) Baslösningen i deluppg. a är optimal och har flödet $x_{45} = 3 = l_{45}$. Från de reducerade kostnaderna i deluppgift a framgår att det finns alternativa optimallösningar ty $\bar{c}_{45} = \bar{c}_{23} = 0$. För att besvara frågan behöver vi undersöka samtliga optimala baslösningar. Låt (4,5) bli inkommande basbåge, vilket ger cykeln:



Ingen flödesändring är möjlig, båge (2,5) blir utgående.

Nytt basträd: (1,2), (2,4), (4,5), (5,3)

Beräkna nodpriser:

$y_1 = 0$

$\bar{c}_{12} = c_{12} + y_1 - y_2 = 1 + 0 - y_2 = 0 \iff y_2 = 1$

$\bar{c}_{24} = c_{24} + y_2 - y_4 = 1 + 1 - y_4 = 0 \iff y_4 = 2$

$\bar{c}_{45} = c_{45} + y_4 - y_5 = 1 + 2 - y_5 = 0 \iff y_5 = 3$

$\bar{c}_{53} = c_{53} + y_5 - y_3 = 3 + 3 - y_3 = 0 \iff y_3 = 6$

Reducerad kostnad, icke-basbågar:

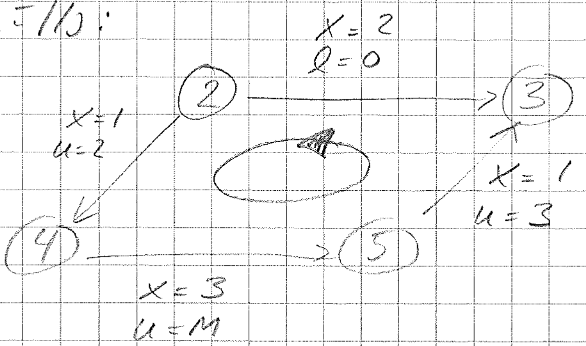
$\bar{c}_{14} = c_{14} + y_1 - y_4 = 4 + 0 - 2 = 2$, $x_{14} = 1 = l_{14}$, optimalt

$\bar{c}_{25} = c_{25} + y_2 - y_5 = 2 + 1 - 3 = 0$, $x_{25} = 0 = l_{25}$, optimalt

$\bar{c}_{23} = c_{23} + y_2 - y_3 = 5 + 1 - 6 = 0$, $x_{23} = 2 = u_{23}$, optimalt

Vi har nu studerat två optimala baslösningar (där $x_{45} = 3$). Genom att låta (2,3) bli inkommande basbåge kan ytterligare en optimal baslösning erhållas (ty $\bar{c}_{23} = 0$). Vi behöver också studera den?

Följande cykel erhålls:
(Flödet på båge (2,3) ska minskas)



Det går att skicka en enhet flöde i cykeln, vilket gör att $x_{45} = 4 > 3$ (utgående basbåge blir (2,4))

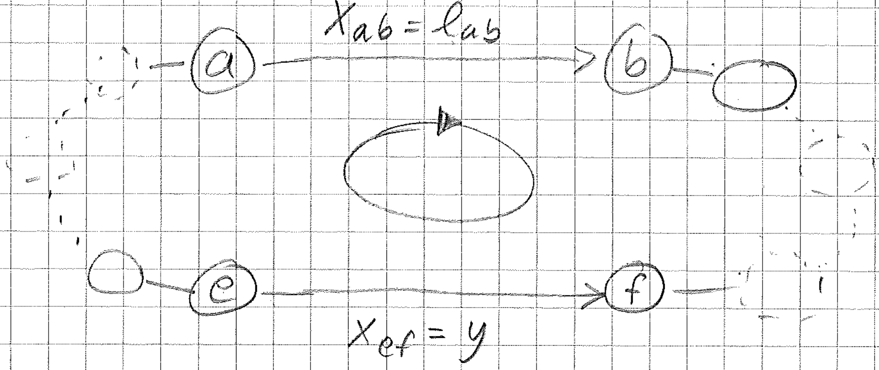
Eftersom den inkommande basbågen hade $\bar{c}_{23} = 0$ vet vi att den erhållna baslösningen får samma målfunktionsvärde och är optimal.

Från flödesändringsberäkningen i cykeln ovan vet vi att $x_{45} = 4 > 3$.

Detta räcker för att dra slutsatsen att det existerar en optimallösning där $x_{45} > 3$.

Svar: Ja, det gör det.

c) Studera den cykel i vilken flödesändringen görs vid pivoteringen.
Eftersom flödet på (a,b) ökar och flödet på (e,f) minskar vid pivoteringen måste (a,b) och (e,f) ha olika riktningar i cykeln. Låt flödet på (e,f) vara $x_{ef} = y$



Vid pivoteringen ändras flödet med $y - l_{ef}$ och målfunktionsvärdet ökar med $k \cdot (y - l_{ef})$.

Om man från den nya baslösningen gör en pivotering tillbaka till den ursprungliga så måste flödesändringen vara lika stor, dvs. $y - l_{ef}$ och målfunktionsvärdet minska med $k(y - l_{ef})$.
Således måste det gälla att $\bar{c}_{ef} = -k$.

Svar: Ja, man vet att $\bar{c}_{ef} = -k$

Uppgift 3

a) Variabler: x_i = antal tillverkade produkter av modell i, $i = A, B, C$

Modell:
$$\begin{aligned} \max \quad & 2000x_A + 3000x_B + 4000x_C \\ \text{då} \quad & 1{,}5x_A + 3x_B + 5x_C \le 6000 \\ & 30x_A + 25x_B + 40x_C \le 60\,000 \\ & x_A, x_B, x_C \ge 0 \text{ helt.} \end{aligned}$$

b) Lägg till variabeln
y = antalet köpta extratimmar

Modell:
$$\begin{aligned} \max \quad & 2000x_A + 3000x_B + 4000x_C - k \cdot y \\ \text{då} \quad & 1{,}5x_A + 3x_B + 5x_C \le 6000 \\ & 30x_A + 25x_B + 40x_C \le 60\,000 + y \\ & y \le 800 \\ & x_A, x_B, x_C, y \ge 0 \text{ helt.} \end{aligned}$$

c) Behåll variabeln x_A i betydelsen antalet tillverkade produkter av modell A för vilka vinsten är 2000 kr. För x_A gäller $0 \leq x_A \leq b$

Lägg till variablerna:

$$u = \begin{cases} 1 & \text{om fler än } b \text{ produkter av modell A tillverkas} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

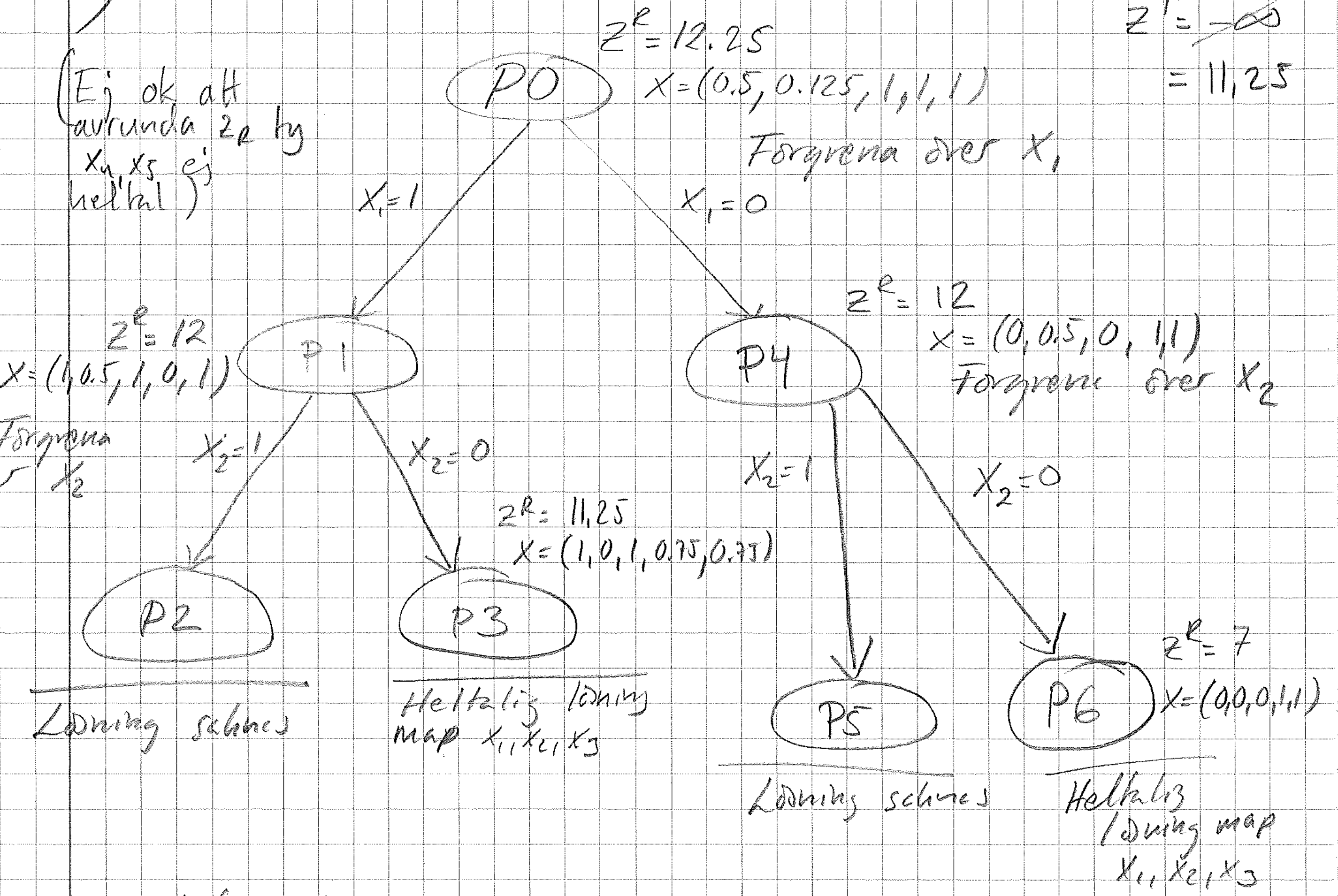
v = antal tillverkade produkter av modell A utöver de första b enheterna

Koppling mellan x_A och u fås genom villkoret $b \cdot u \leq x_A \leq b$ ty om $u = 0$ fås $0 \leq x_A \leq b$ och om $u = 1$ fås $b \leq x_A \leq b$. Koppling mellan u och v fås genom $v \leq M \cdot u$. På detta sätt tvingas v vara 0 till dess att $x_A = b$, sedan tillåts v öka. Viktigt att v tvingas till noll ty v är mer lönsam än x_A i målfunktionen.

Modell:
$$\max \; 2000(x_A + 1.1v) + 3000x_B + 4000x_C$$
$$\text{då} \quad 1,5(x_A + v) + 3x_B + 5x_C \leq 6000$$
$$30(x_A + v) + 25x_B + 40x_C \leq 68\,000$$
$$b \cdot u \leq x_A \leq b$$
$$v \leq M \cdot u$$
$$x_A, x_B, x_C, v \geq 0 \text{ heltal}$$
$$u \in \{0,1\}$$

Uppgift 4

a)



Hela trädet kapat, bästa tillåtna lösning är den som erhölls i P3:

$x = (1, 0, 1, 0.75, 0.75)$ med $z = 11.25$

b) Villkoren om enbart x_1, x_2, x_3 inkluderas blir

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 8 \quad (1)$$
$$2x_1 + 2x_3 \le 6 \quad (3)$$
$$3x_1 + 4x_2 \le 6 \quad (4)$$

Från villkor (1) eller (3) kan ingen övertäckning genereras eftersom det är tillåtet för samtliga variabler att bli 1.

För villkor (4) utgör $S=\{1,2\}$ en minimal övertäckning eftersom

$\sum_{j\in S} a_j = a_1 + a_2 = 3+4 = 7 > 6$,

$\sum_{j\in S\setminus\{1\}} a_j = a_2 = 4 \leq 6$ och

$\sum_{j\in S\setminus\{2\}} a_j = a_1 = 3 \leq 6$

Svar: Ja, från (4) kan $x_1 + x_2 \leq 1$ genereras

c) Eftersom det givna problemet också inkluderar kontinuerliga variabler så är det inte möjligt att använda Gomorysnitt. Således kan Land-Doig-Dakins algoritm i detta fall inte kombineras med att lägga till Gomorysnitt. (Detta är möjligt för problem med enbart heltaliga variabler)

Uppgift 5

a) <u>Variabler</u>: $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om båge } (i,j) \text{ ingår i vägen}, (i,j) \in B \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

där $B = \{(1,2), (1,4), (2,3), (2,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,7), (5,6), (5,7), (6,8), (7,8), (7,9), (8,9)\}$

<u>Modell:</u>

$$\min z = 2x_{12} + 3x_{14} + 2x_{23} + 5x_{24} + x_{35} + 6x_{36} + 4x_{45} + 9x_{47} + 7x_{56} + 4x_{57} + 3x_{68} + 5x_{78} + 2x_{79} + x_{89} = \sum_{(i,j)\in B} c_{ij} x_{ij}$$

då

$$x_{45} + x_{78} \geq 1 \quad \text{villkor (i)}$$

$$x_{14} - x_{79} \geq 0 \quad \text{villkor (ii)}$$

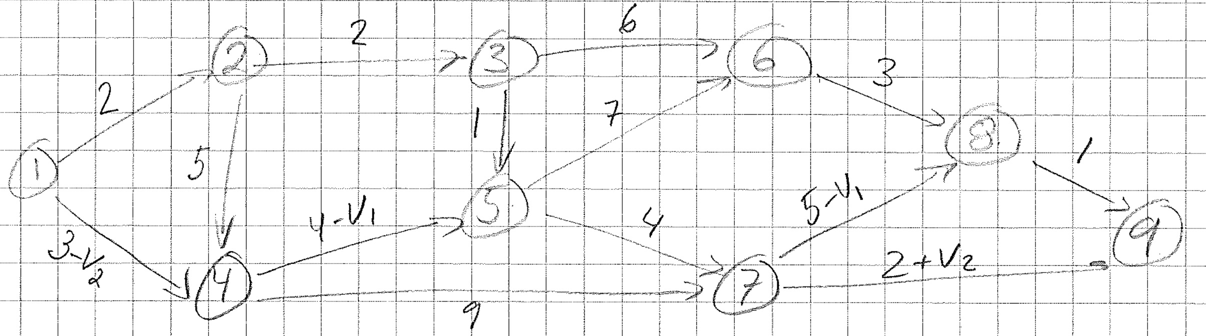
$$\left.\begin{aligned}
-x_{12} - x_{14} &= -1 \\
x_{12} - x_{23} - x_{24} &= 0 \\
x_{23} - x_{35} - x_{36} &= 0 \\
x_{14} + x_{24} - x_{45} - x_{47} &= 0 \\
x_{35} + x_{45} - x_{56} - x_{57} &= 0 \\
x_{36} + x_{56} - x_{68} &= 0 \\
x_{47} + x_{57} - x_{78} - x_{79} &= 0 \\
x_{68} + x_{78} - x_{89} &= 0 \\
x_{79} + x_{78} &= 1 \\
x_{ij} \in \{0,1\}, \ (i,j) &\in B
\end{aligned}\right\} \text{Kalla denna mängd } X$$

b) $L(x,v) = \sum_{(i,j)\in B} c_{ij}x_{ij} + v_1(1 - x_{45} - x_{78}) + v_2(0 - x_{14} + x_{79}) =$

$= 2x_{12} + (3 - v_2)x_{14} + 2x_{23} + 5x_{24} + x_{35} + 6x_{36} + (4 - v_1)x_{45} +$
$9x_{47} + 7x_{56} + 4x_{57} + 3x_{68} + (5 - v_1)x_{78} + (2 + v_2)x_{79} + x_{89} + v_1$

då $v_1, v_2 \geq 0$, $x \in X$

$h(v_1, v_2) = \min_{x\in X} L(x,v)$ och nätverket blir:



$v_1 = 1/2$, $v_2 = 1/2$:

Bellmans ekvationer:

$y_1 = 0$

$y_2 = \min\{y_1 + c_{12}\} = 0 + 2 = 2$

$y_3 = \min\{y_2 + c_{23}\} = 2 + 2 = 4$

$y_4 = \min\{y_1 + c_{14}, y_2 + c_{24}\} = \min\{0 + 3 - 1/2, 2 + 5\} = 2{,}5$

$y_5 = \min\{y_3 + c_{35}, y_4 + c_{45}\} = \min\{4 + 1, 2{,}5 + 4 - 1/2\} = 5$

$y_6 = \min\{y_3 + c_{36}, y_5 + c_{56}\} = \min\{4 + 6, 5 + 7\} = 10$

$y_7 = \min\{y_4 + c_{47}, y_5 + c_{57}\} = \min\{2{,}5 + 9, 5 + 4\} = 9$

$y_8 = \min\{y_6 + c_{68}, y_7 + c_{78}\} = \min\{10 + 3, 9 + 5 - 1/2\} = 13$

$y_9 = \min\{y_7 + c_{79}, y_8 + c_{89}\} = \min\{9 + 2 + 1/2, 13 + 1\} = 11\,1/2$

$h(1/2, 1/2) = 11\,1/2 + 1/2 = 12$, optimistisk skattning

Erhållen väg: 1-2-3-5-7-9. Pessimistisk skattning fås ej ty vägen är ej tillåten mht villkor i och ii. (i: $0 + 0 \neq 1$ och ii: $0 - 1 \neq 0$)

$v_1 = 7/2,\ v_2 = 2$:

$y_1 = 0$

$y_2 = \min\{\underline{y_1 + c_{12}}\} = 0 + 2 = 2$

$y_3 = \min\{y_2 + c_{23}\} = 2 + 2 = 4$

$y_4 = \min\{\underline{y_1 + c_{14}}, y_2 + c_{24}\} = \min\{\underline{0+3-2}, 2+5\} = 1$

$y_5 = \min\{y_3 + c_{35}, \underline{y_4 + c_{45}}\} = \min\{4+1, \underline{1+4-3{,}5}\} = 1{,}5$

$y_6 = \min\{y_3 + c_{36}, y_5 + c_{56}\} = \min\{4+6, \underline{1{,}5+7}\} = 8{,}5$

$y_7 = \min\{y_4 + c_{47}, \underline{y_5 + c_{57}}\} = \min\{1+9, \underline{1{,}5+4}\} = 5{,}5$

$y_8 = \min\{y_6 + c_{68}, \underline{y_7 + c_{78}}\} = \min\{8{,}5+3, \underline{5{,}5+5-3{,}5}\} = 7$

$y_9 = \min\{y_7 + c_{79}, \underline{y_8 + c_{89}}\} = \min\{5{,}5+2+2, \underline{7+1}\} = 8$

$h(7/2, 2) = 8 + 3{,}5 = 11{,}5$, optimistisk skattning

Erhållen väg: 1-4-5-7-8-9

Är tillåten mht villkor i och ii ty:

i: $1 + 1 \geq 1$, ok! ; ii: $1 - 1 \geq 0$, ok!

Denna tillåtna lösning har målfunktionsvärde

$3 + 4 + 4 + 5 + 1 = 17$

Slutsatser:

Har optimistiska skattningarna 12 och 11,5 varav 12 är starkast. Har pessimistisk skattning 17, så $12 \leq z^* \leq 17$.

c) Hyperplanen i det duala rummet utgörs av

$$\sum_{(i,j)\in B} c_{ij} x_{ij}^{(t)} + v_1 (1 - x_{45}^{(t)} - x_{78}^{(t)}) + v_2 (0 - x_{14}^{(t)} + x_{79}^{(t)})$$

där $x_{ij}^{(t)}$, $(i,j) \in B$ utgör variabelvärdena till subproblemlösning t, $t = 1, \dots, T$

För $v_1 = 1/2$, $v_2 = 1/2$ fås

$$11 + v_1 (1 - 0 - 0) + v_2 (0 - 0 + 1) = 11 + v_1 + v_2$$

För $v_1 = 7/2$, $v_2 = 2$ fås:

$$17 + v_1 (1 - 1 - 1) + v_2 (0 - 1 + 0) = 8 - v_1 - v_2$$

Erhållna hyperplan: $11 + v_1 + v_2$

$17 - v_1 - v_2$

a) Steg: $t = 1, 2, 3$

Styrvariabler: x_t = antalet producerade produkter i månad t

Tillstånd: s_t = antal produkter i lager i början av månad t

Övergångsfunktion: $s_{t+1} = s_t + x_t - d_t = s_t + x_t - 1$
där d_t = efterfrågan i månad t

Optimalvärdesfunktion: $f_t(s_t)$: minimal kostnad i månad t t.o.m. 3 givet s_t produkter i lager i månad t

Rekursionssamband: $f_t(s_t) = \min_{x_t} \{ f_{t+1}(s_{t+1}) + c_t(x_t) + 2s_t \}$

där $c_t(x_t)$ är produktionskostnad enligt tabell

Randvillkor: $s_1 = 0$, $s_4 = 1$, $f_4(s_4) = 0$

Variabelbegränsningar: $0 \le x_t \le 3$, $t = 1, 2, 3$
$0 \le s_t \le 2$, $t = 2, 3$

Steg 3:

$s_3 = 0, 1, 2$; $x_3 = 0, 1, 2, 3$

$s_4 = s_3 + x_3 - 1$, $s_4 = 1$

Kostnad: $f_4(s_4) + c_3(x_3) + 2s_3$

x_3 \ s_3	0	1	2
0	$s_4=-1$ —	$s_4=0$ —	$s_4=1$, $1+4=5$
1	$s_4=0$ —	$s_4=1$, $9+2=11$	$s_4=2$ —
2	$s_4=1$, $11+0=11$	$s_4=2$ —	$s_4=3$ —
3	$s_4=2$ —	$s_4=3$ —	$s_4=4$ —
$f_3(s_3)$	11	11	5
$x_3^*(s_3)$	2	1	0

Steg 2: Kostnad $f_3(s_3)+c_2(x_2)+2s_2$

$s_2=0,1,2$; $x_2=0,1,2,3$; $s_3=s_2+x_2-1$, $0\le s_3\le 2$

x_2 \ s_2	0	1	2
0	$s_3=-1$ —	$s_3=0$, $11+1+2=14$	$s_3=1$, $11+1+4=16$
1	$s_3=0$, $11+8+0=19$	$s_3=1$, $11+8+2=21$	$s_3=2$, $5+8+4=17$
2	$s_3=1$, $11+9+0=20$	$s_3=2$, $5+9+2=16$	$s_3=3$ —
3	$s_3=2$, $5+14+0=19$	$s_3=3$ —	$s_3=4$ —
$f_2(s_2)$	19	14	16
$x_2^*(s_2)$	1 el. 3	0	0

Steg 1: Kostnad: $f_2(s_2) + c_1(x_1) + 2s_1$

$s_1 = 0,\ x_1 = 0,1,2,3;\ s_2 = s_1 + x_1 - 1,\ 0 \le s_2 \le 2$

$x_1 \backslash s_1$	0
0	$s_2 = -1$ —
1	$s_2 = 0$, $19+8+0=27$
2	$s_2 = 1$, $14+10+0=24$
3	$s_2 = 2$, $16+15+0=31$
$f_1(s_1)$	24
$x_1^*(s_1)$	2

Nysta upp:

$x_1 = 2 \Rightarrow s_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow$
$s_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 2$

Svar: En optimal produktionsplan är
2 enh. månad 1
0 enh. månad 2
2 enh. månad 3

Kostnad: 24 tkr

b) Enda skillnaden mot deluppgift a är att $s_1 = 2$ istället för $s_1 = 0$. Det räcker att göra om sista tabellen.

$x_1 \backslash s_1$	2
0	$s_2 = 1$, $14+2+4=20$
1	$s_2 = 2$, $16+8+4=28$
2	$s_2 = 3$ —
3	$s_2 = 4$ —
$f_1(s_1)$	20
$x_1^*(s_1)$	0

Nysta upp:

$x_1 = 0 \Rightarrow s_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow$
$s_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 2$

Svar: En ny optimal produktionsplan blir
0 enh. månad 1
0 enh. månad 2
2 enh. månad 3

Kostnad: 20 tkr