Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP62 och TAOP37, TEN1
OPTIMERINGSLÄRA FORTSÄTTNINGSKURS för I och Ii

Datum:	17:a mars 2018
Tid:	08.00–13.00
Hjälpmedel:	Kurslitteratur av Lundgren m fl: ***Optimeringslära* lärobok**, nya upplagan med mjuk pärm, blå bok. Det är tillåtet med anteckningar och klisterlappar i läroboken. **Dubblesidigt A4-blad, handskrivna anteckningar**.
Antal uppgifter:	6 Varje uppgift kan ge högst 3 eller 4 poäng. För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Elina Rönnberg
Jourhavande lärare:	Elina Rönnberg 013-28 16 45

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1.

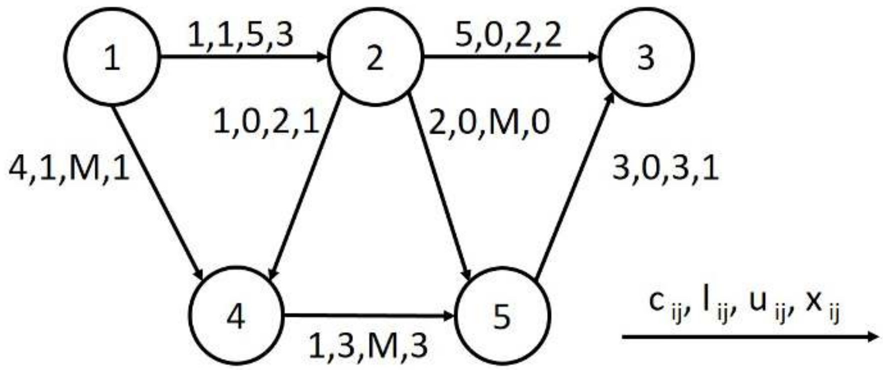
Denna uppgift handlar om rita ett minkostnadsflödesnätverk för ett partiformningsproblem (som liknar problemet i Uppgift 6). Partiformningsproblemet syftar till att minimera kostnaden för produktion och lagring av en produkt för de kommande tre månaderna, $t = 1, \ldots, 3$. Maximalt kan tre produkter per månad produceras och produktionskostnaden är c_t tkr per produkt i månad t, $t = 1, \ldots, 3$. Det inkommande lagret den första månaden är 2 enheter och företaget vill att det efter månad 3 ska finnas 1 produkt kvar i lager. Efterfrågan är 1 produkt per månad. Kostnaden för lagring är 2 tkr per produkt som finns i det inkommande lagret den aktuella månaden, lagret har plats för maximalt 5 produkter.

a. Rita ett minkostnadsflödesnätverk som beskriver problemet att planera produktion och lagring på ett sådant sätt att den totala kostnaden minimeras. Gör **inte** en billigaste väg formulering! **(2p)**

b. Antag att man inte lägre vet hur många produkter företaget vill ha i lager efter månad 3 utan att de istället beräknat att de får en kostnadsminskning på d tkr per produkt som finns i lagret efter månad 3. (Denna kostnadsminskning motsvarar framtida förväntade intäkter av att ha produkter i lager.) Rita ett minkostnadsflödesnätverk som beskriver problemet att planera produktion och lagring på ett sådant sätt att den totala kostnaden minimeras. Gör **inte** en billigaste väg formulering! **(1p)**

Uppgift 2.

Studera följande nätverk där nod 1 och 4 är källor med styrka 4 respektive 1 och nod 3 och 5 är sänkor med styrka 3 respektive 2.



a. Börja med att visa att flödet som givits i figuren ovan är tillåtet genom att kontrollera att nodbalansvillkoren är uppfyllda. En baslösning som svarar mot det givna flödet har basbågarna (1,2), (2,4), (2,5), (5,3). Beräkna de reducerade kostnaderna för denna baslösning och avgör om den är optimal. **(1p)**

b. Avgör om det existerar någon lösning till problemet som är optimal och har ett flöde på båge (4,5) som är strikt större än 3. **(1p)**

c. Denna deluppgift är fristående från ovanstående deluppgifter.

Antag att man löser ett minkostnadsflödesproblem med primala simplexmetoden för nätverk och att man i en iteration väljer icke-basbågen (a,b) med flöde på sin undre gräns och reducerad kostnad $\bar{c}_{ab} = k < 0$ som inkommande basbåge och att bågen (e,f) blir utgående basbåge med ett nytt flöde på sin undre gräns. Går det att uttala sig om vilket värde $\bar{c}_{ef}$ får i den nya baslösningen?

Denna deluppgift bedöms på ett sådant sätt att ett **kortfattat och relevant** svar kan ge poäng och att det enbart är kvalitén på motiveringen som är avgörande för poängsättnignen.

(2p)

Uppgift 3.

Ett företag ska planera sin produktion av en produkt som finns i de tre modellerna A, B och C. Antalet råvaruresurser och tillverkningstimmar som krävs per produkt av respektive modell ges av tabellen nedan. Antalet tillgängliga råvaruresurser är 6 000 och antalet tillgängliga tillverkningstimmar är 60 000. Den beräknade vinsten per producerad produkt för vardera modell ges också av tabellen.

	A	B	C
Antalet råvaruresurser	1,5	3	5
Antalet tillverkningstimmar	30	25	40
Beräknad vinst	2 000	3 000	4 000

a. Formulera en linjär heltalsmodell som beskriver problemet att avgöra hur många av vardera modell av produkten som ska produceras för att vinsten ska maximeras, givet att tillgången på råvaruresurser och tillverkningstimmar respekteras. **(1p)**

b. Utöka modellen i deluppgift **a** med möjligheten att köpa ett valfritt antal tillverkningstimmar till en kostnad av k kr per timme. Maximalt kan 800 extra timmar köpas. **(1p)**

c. I denna deluppgift ska vi göra en lite mer detaljerad modellering av den vinst företaget beräknar göra för produkten av modell A. Den beräknade vinsten som givits ovan är enbart giltig om antalet tillverkade produkter är i intervallet $[0, b]$. Om antalet produkter är högre än b så är vinsten 10% högre än det givna värdet för varje produkt utöver de b första produkterna.

Utöka din modell från deluppgift **a** så att den inkluderar denna mer detaljerade modellering av vinsten. Den resulterande modellen ska fortfarande vara en linjär heltalsmodell. **(1p)**

Uppgift 4.

Betrakta följande blandade linjära heltalsproblem.

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrl}
\max z & = & 4x_1 & + & 10x_2 & + & 2x_3 & + & 6x_4 & + & x_5 & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & & & \leq & 8 \quad (1) \\
& & 2x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & \geq & 4 \quad (2) \\
& & 2x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & - & x_5 & \leq & 6 \quad (3) \\
& & 3x_1 & + & 4x_2 & & & + & 3x_4 & + & x_5 & \leq & 6 \quad (4) \\
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}$$
$$0 \leq x_4 \leq 1$$
$$0 \leq x_5 \leq 1$$

a. Använd Land-Doig-Dakins algoritm för att hitta en optimallösning till problemet. Förgrena över den variabel med störst fraktionell del, avsök 1-grenen först och använd djup-först sökning. Numrera noderna i den ordning du avsöker dem!

Notera att problemet enbart har tre variabler med heltalskrav och att det enbart är över dessa förgrening kan ske. De två kontinuerliga variablerna tillåts få fraktionella värden, vilket innebär att trädet ska kapas och en tillåten lösning har erhållits om de tre heltaliga variablerna får heltaliga värden.

Lösningar till samtliga möjliga subproblem återfinns i tabellen på nästa sida. De tre första kolumnerna ger vilka eventuella fixeringar som gjorts i den aktuella noden (exempelvis om vi står i en nod där x_1 inte fixerats, $x_2 = 1$ och $x_3 = 0$, välj raden med: - 1 0), fjärde kolumnen ger lösningen i denna nod (om tillåten lösning saknas anges ett -) och femte kolumnen ger lösningens målfunktionsvärde. **(2p)**

b. Studera bivillkoren (1), (3) och (4) ovan och ta bort variablerna x_4 och x_5 ur dessa. Avgör för vilka av villkoren det går att generera ett övertäckningsvillkor med avseende på variablerna x_1, x_2, x_3 och ange ett överteckningsvillkor eller en motviering till varför det inte finns något. **(1p)**

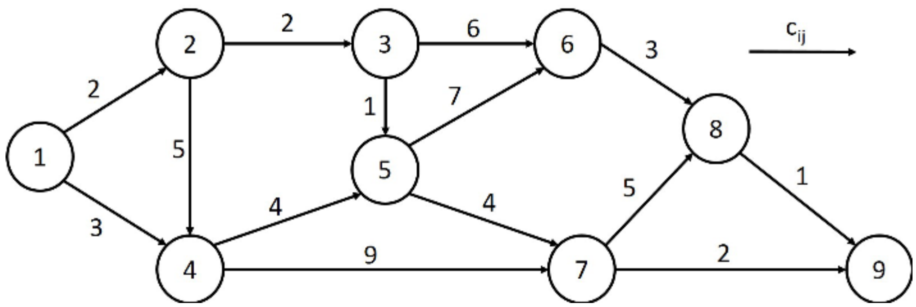
c. Skulle det vara möjligt att skapa en lösningsmetod för problemet ovan där Land-Doig-Dakins algoritm kombineras med att lägga till Gomorysnitt?

Denna deluppgift bedöms på ett sådant sätt att ett **kortfattat och relevant** svar kan ge poäng och att det enbart är kvalitén på motiveringen som är avgörande för poängsättnignen. **(1p)**

x_1	x_2	x_3	x-lösning					z
-	-	-	0.5	0.125	1	1	1	12.25
-	0	-	0.714	0	1	1	0.857	11.714
-	1	-			-			-
-	-	0	0	0.5	0	1	1	12
-	-	1	0.5	0.125	1	1	1	12.25
-	1	0			-			-
-	0	1	0.714	0	1	1	0.857	11.714
-	0	0	0.857	0	0	1	0.429	9.857
-	1	1			-			-
0	-	-	0	0.5	0	1	1	12
0	0	-	0	0	0	1	1	7
0	1	-			-			-
0	-	0	0	0.5	0	1	1	12
0	-	1			-			-
0	1	0			-			-
0	0	1			-			-
0	0	0	0	0	0	1	1	7
0	1	1			-			-
1	-	-	1	0.5	1	0	1	12
1	0	-	1	0	1	0.75	0.75	11.25
1	1	-			-			-
1	-	0	1	0.583	0	0	0.667	10.5
1	-	1	1	0.5	1	0	1	12
1	1	0			-			-
1	0	1	1	0	1	0.75	0.75	11.25
1	0	0	1	0	0	0.875	0.375	9.625
1	1	1			-			-

Uppgift 5.

Studera följande acykliska nätverk där noderna numrerats så att alla bågar går från en nod med lägre nummer till en nod med högre nummer.



Antag att vi vill finnan en billigaste väg från nod 1 till nod 9 sådan att följande två bivillkor är uppfyllda.

- Vägen innehåller minst en av bågarna (4,5) och (7,8). (i)
- Om båge (7,9) ingår i vägen så måste även båge (1,4) ingå i vägen. (ii)

a. Teckna en matematisk modell för det givna problemet. Låt mängden B innehålla alla bågar som ges i nätverket ovan och använd variabeldefinitionen

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{om båge}(i,j) \text{ ingår i vägen,}(i,j) \in B \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Formulera bivillkor (i) och (ii) som $\geq$-villkor med samtliga variabler i vänsterledet. **(1p)**

b. Lagrangerelaxera bivillkor (i) och (ii) med multiplikatorerna $v_1 \geq 0$ respektive $v_2 \geq 0$ och rita det resulterande billigaste väg nätverket. Lös Lagrangesubproblemet för multiplikatorvärdena $v_1 = 1/2$, $v_2 = 1/2$ och för multiplikatorvärdena $v_1 = 7/2$, $v_2 = 2$. Subproblemen ska lösas genom att lösa Bellmans ekvationer i nummerordning.

Vilken är den starkaste optimistiska respektive pessimistiska skattning av det optimala målfunktionsvärdet som erhålls från dessa subproblemlösningar? **(2p)**

c. Ange vilka hyperplan i det duala rummet som erhålls från beräkningarna i deluppgift **b.** **(1p)**

Uppgift 6.

Studera följande partiformningsproblem som syftar till att minimera kostnaden för produktion och lagring av en produkt för de kommande tre månaderna, $t = 1, \dots, 3$. Företagets produktionskostnad för en viss produktionsnivå och månad ges i tkr enligt följande tabell.

	månad		
antal produkter	1	2	3
0	2	1	1
1	8	8	9
2	10	9	11
3	15	14	15

Det inkommande lagret första månaden är tomt, och företaget vill att det efter månad 3 ska finnas en produkt kvar i lager. Efterfrågan är 1 produkt per månad. Kostnaden för lagring är 2 tkr per produkt som finns i det inkommande lagret den aktuella månaden, lagret har plats för maximalt 2 produkter.

a. Lös det givna problemet med dynamisk programmering, bakåtrekursion. Innan du börjar lösa problemet, redovisa steg, styrvariabler, tillstånd, överföringsfunktion, optimalvärdesfunktion, rekursionssamband, randvillkor och variabelbegränsningar. Ange en optimal produktionsplan och dess kostnad i svaret. **(2p)**

b. Vid lösningen av problemet ovan antogs att det inkommande lagret den första månaden var tomt. Företaget har nu upptäckt att så inte är fallet utan att de faktiskt har två produkter i inkommande lager den första månaden. Givet denna förändring, hur kan du på ett enkelt sätt beräkna en ny lösning till problemet utan att lösa det från början? Beräkna denna lösning. **(1p)**